

И. Б. БРЕНДАЛ

АКУСТИКА

**ВЭТА — КУБУЧ
ЛЕНИНГРАД — 1934**

ВОЕННАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ РККА
ИМ. Т. БУДЕННОГО

КРЕНДАЛЛ И. Б.

АКУСТИКА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО



ВЭТА
ЛЕНИНГРАД
1934

THEORY OF VIBRATING SYSTEMS AND SOUND

By

IRVING B. CRANDALL, PH. D.

Late Member of the Technical Staff

Bell Telephone Laboratories, Inc.

SECOND PRINTING

NEW YORK

D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC.

EIGHT WARREN STREET

1927

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Несмотря на то, что со времени выхода книги Крендалла прошло уже 7 лет и за это время вышло не мало книг по акустике, она остается не превзойденной по сжатости и ясности изложения и удачному выбору материала. Несколько устарели только литературные указания. Поэтому появление ее в русском переводе представляется нам весьма полезным; она найдет себе прочное место в библиотеке советского акустика.

Проф. *Н. Андреев.*

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Наибольшие затруднения были встречены при переводе сжатой и вполне установившейся американской терминологии. Впредь, до установления стандартной русской терминологии в области акустики, мы нашли необходимым воспользоваться следующими терминами, которые и приведем здесь в сопоставлении с соответствующими терминами оригинала:

impedance — полное сопротивление (иногда сокращенно — сопротивление)

mechanical impedance — механическое сопротивление

acoustical impedance — акустическое сопротивление

reactance — реактивное сопротивление

resistance — активное сопротивление

inertance, mass reactance, inertia reactance — инерционное (реактивное) сопротивление

stiffness reactance — упругое (реактивное) сопротивление

mass coefficient — обычно имеет смысл установившегося термина: действующая масса

admittance — податливость

cycle — герц

overdamped — сверхапериодический

rate of working — мощность

rate of emission — поток

membrane — мембрана

diaphragm — диафрагма

Примечание. Здесь мы нашли необходимым отказаться от уже установившейся, но заведомо неточной терминологии.

incident	} wave	— падающая	} волна
reflected		— отраженная	
transmitted		— проходящая	

transmission — чаще всего имеет смысл „распространение“

transmission conduit — в тексте встречается в смысле „звукопровод“

momentum ($m\dot{x}$) — количество движения

driving point — точка возбуждения; в некоторых местах — точка приложения силы.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

Стр.

Простые колебательные системы.

§ 1. Введение. Принцип суперпозиции	9
§ 2. Уравнение движения простой системы	11
§ 3. Собственные колебания	12
§ 4. Периодическая движущая сила	14
§ 5. Полное решение для вынужденных и свободных колебаний	15
§ 6. Начальные условия при воздействии периодической движущей силы	15
§ 7. Периодическая движущая сила с переменной частотой	17
§ 8. Физическая природа постоянных системы	19
§ 9. Теория равновесия или низкой частоты; круглая мембрана	21
§ 10. Общая теория круглой мембраны; Бесселевы функции	22
§ 11. Воздушное демпфирование; поршневая система; функции ber и bei	27
§ 12. Эквивалентный поршень; средняя скорость; диафрагмы	32
Задачи 1—10	34

ГЛАВА II.

Общая теория колебательных систем; резонаторы и фильтры.

§ 20. Обобщенные координаты	35
§ 21. Система с двумя степенями свободы; о собственных колебаниях вообще	36
§ 22. Теория установившегося режима для двух степеней свободы и в общем случае	38
§ 23. Метод Лагранжа и уравнения движения	40
§ 24. Резонаторы	42
§ 25. Резонатор, связанный с диафрагмой	46
§ 26. Задача о нагруженной струне. Фильтры	50
§ 27. Акустические фильтры	56
§ 28. Конечная струна, нормальные координаты, нормальные функции	58
Задачи 11—20	62

ГЛАВА III.

Распространение звука.

§ 30. Свойства среды; уравнение волнового движения	63
§ 31. Свойства плоских звуковых волн	66
§ 32. Распространение звука в трубах	70
§ 33. Приближенная теория резонанса в трубах	76
§ 34. Общее рассмотрение физических факторов, влияющих на распространение	78
§ 35. Общая теория звуковых волн в трех измерениях	82
§ 36. Сферические звуковые волны; точечный источник	84
§ 37. Пульсирующая сфера как генератор звука	87
§ 38. Реакция окружающей среды на колеблющуюся струну	89
Задачи 21—30	95

ГЛАВА IV.

Проблемы излучения и распространения.

§ 40. Общие соображения; одиночные и двойные источники	96
§ 41. Излучение поршня при высоких частотах; диффракция	98

	Стр.
§ 42. Излучение поршнем в полубезграничную среду	101
§ 43. Поправки на влияние концов трубы; сопротивление круглого отверстия . . .	106
§ 44. Характеристики рупоров; конические рупоры	108
§ 45. Рупоры с сечением, меняющимся по экспоненциальному закону	112
§ 46. Экспоненциальный рупор конечных размеров	115
§ 47. Действие звуковых волн на простую колебательную систему	123
§ 48. Давления звукового излучения	126
Задачи 31—40	127

ГЛАВА V.

Акустика закрытых помещений; поглощение, отражение и реверберация.

§ 50. Архитектурная акустика	128
§ 51. Отражение и поглощение	130
§ 52. Слои из поглощающего материала	134
§ 53. Реверберация в замкнутой трубе	140
§ 54. Реверберация в трех измерениях	142
§ 55. Системы стоячих волн. Фокальные свойства помещения; акустические трудности	147
§ 56. Реакция помещения на источник звука	151
Задачи 41—50	153
Приложение А. Коэффициенты сопротивления цилиндрических звукопроводов .	155
Приложение Б. Новейшие открытия в области прикладной акустики	162

ОБОЗНАЧЕНИЯ.

- $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$ — смещение, скорость, ускорение.
 $\xi_0, \dot{\xi}_0, \ddot{\xi}_0$ — максимальные значения, т. е. $\xi = \xi_0 e^{i\omega t}$.
 r, m, s — коэффициенты активного сопротивления, массы и упругости в системе с одной степенью свободы.
 Ψ_1, Ψ_k — приложенные силы, т. е. $\Psi = \Psi_0 e^{i\omega t}$.
 Z, Z_k, Z_{jk} — полные сопротивления; определяются смотря по необходимости.
 f, ω — частота, $\omega = 2\pi f$.
 f_0, f_k, n, n_k — собственная частота, $n = 2\pi f_0, n_k = 2\pi f_k$.
 Δ, Δ_k — коэффициент затухания или обратный модуль затухания.
 $n' = \sqrt{n^2 - \Delta^2}$ — частота собственных колебаний $\times 2\pi$.
 $\lambda, \lambda_k, \lambda_{jk}$ — корни вспомогательного уравнения.
 a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} — коэффициенты массы, активного сопротивления и упругости в общей теории.
 T, V, F — функции кинетической энергии, потенциальной энергии и рассеяния.
 D — определитель Лагранжа коэффициентов уравнения движения.
 $\alpha_j, \alpha_k; \beta_j, \beta_k$ — коэффициенты D .
 τ — натяжение.
 ρ — плотность (в применении к линиям, поверхностям или объемам).
 P, p_0 — общее давление, среднее давление.
 $p, \delta p$ — избыточное давление по отношению к среднему.
 R, R_k — сопротивление излучения.
 R, R_1 — коэффициенты сопротивления на единицу длины, суженные звукопроводы.
 μ — коэффициент вязкости.
 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематическая вязкость.
 γ — отношение удельных теплоемкостей для газа.
 κ, κ' — коэффициент объемной упругости; κ' для газа $= \gamma p_0$.
 s, Δ — сжатие и расширение; $s = -\Delta$.
 c, λ — скорость звука, длина волны; $\lambda f = c$.
 S, S_1 — площадь эквивалентного поршня; площадь поверхности стенок.
 K, K_1 — проводимость отверстия.
 V_0, V — объем или емкость резонатора, объем помещения.
 A — напряженность небольшого источника звука; $A = S \ddot{\xi}_0$.
 $k = \frac{\omega}{c}$ — фазная постоянная в непоглощающей среде.
 $\beta = \frac{\omega}{c'}$ — фазная постоянная в поглощающей среде.

c' — фазовая скорость; вообще $c' \neq c$.
 α — показатель затухания при распространении волн.
 ξ, η, ζ — смещения жидкости, параллельно осям x, y, z .
 Φ — потенциал скорости.
 E — плотность энергии в среде.
 $\frac{dW}{dt}$ — интенсивность. $\frac{dW}{dt} = E \cdot c$; $W = T + V$.
 Δ^2 — оператор Лапласа.
 Ω — телесный угол.
 r — коэффициент отражения амплитуды.
 $R = r^2$ — коэффициент отражения энергии.
 t, t_{jk} — коэффициент пропускания.
 A — коэффициент поглощения энергии ($A + R = 1$).
 $a = \Sigma A_j S_j$ — полная поглощающая способность площади ΣS_j .
 T — время реверберации.
 K — постоянная Сэбина для реверберации.

ГЛАВА I.

ПРОСТЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

§ 1. Введение. Принцип суперпозиции.

Физические основания теории звука можно свести к трем первичным явлениям. Первое это то, что звуковые волны возникают каждый раз, когда колеблющееся тело приводится в соприкосновение с упругой средой. Далее по порядку следует распространение звука в упругой субстанции или среде. При этом скорость распространения тем больше, чем больше отношение упругости среды к ее плотности. Звук в процессе распространения обладает всеми свойствами волнового движения. Частицы среды совершают периодическое движение; элементы ее объема подвергаются периодическому расширению и сжатию или, что то же самое, периодическим изменениям плотности и давления. Наконец, мы наблюдаем, что при помещении в звуковое поле надлежаще устроенного прибора на его части начинает действовать кинетическая энергия частиц среды или переменные избыточные давления в данной точке среды. Вследствие этого прибор сам приходит в колебательное состояние и становится детектором или измерительным прибором для звуковой энергии, падающей на него. Разумно пользуясь законами теоретической механики при поддержке экспериментальных исследований, акустика вторглась в широкую область весьма интересных явлений со многими полезными практическими приложениями. Некоторые из них чисто механического свойства, как, например, применение высокочастотных колебательных систем для подводной сигнализации или применение рупоров для лучшего излучения звука в громкоговорителях.

Другие стороны звуковых явлений относятся уже к области физиологии: теоретическая механика бесспорно явилась ценным средством при изучении механизма речи и слуха. Наконец, некоторые приложения относятся к области психологии или эстетики, поскольку они касаются способности человеческого уха отличать звуки музыки и речи от беспорядочных звуков, называемых шумами. В настоящее время есть возможность анализировать и классифицировать звуки всякого рода; и наоборот, мы имеем приборы для воспроизведения и обнаружения звуков почти любой сложности. При помощи электрических приборов звуки могут быть усилены или записаны с большой точностью.

Звук, как и всякое волновое движение, может сопровождаться явлениями интерференции и дифракции; эти явления были использованы для осуществления направленного излучения и приема. Также трением и рассеянием механической энергии сумели воспользоваться для управления резонансом в колебательных системах и реверберацией, обусловливаемой наличием отражающих поверхностей.

Поскольку мы постоянно имеем дело с такими разнообразными явлениями, нам необходим твердый фундамент механической теории. Труд

лорда Рэля, опубликованный тридцать лет тому назад, наиболее авторитетно излагает основные принципы ¹⁾. Однако, с тех пор появлялось еще много работ (некоторые из них принадлежат Рэлю), а также был введен метод полных сопротивлений („импеданцев“), который в соответствии с современной практикой оказался весьма полезным для изучающих акустику. Цель настоящей книги — развернуть в процессе изложения необходимый минимум основной теории и показать, с каким успехом она применима на практике. Задачи, предлагаемые для решения, являются преимущественно типовыми, однако, они ни в коей мере не охватывают всей широкой области прикладной акустики. Они заимствованы из классических и новейших источников, главным образом для целей иллюстрации или добавления рабочего материала для теории.

Предполагается, что читатель хорошо знаком с основными законами физики, поэтому элементарные явления опытной акустики здесь не излагаются; их описания можно найти в соответствующих учебниках ²⁾.

Анализ музыкального звука несомненно известен читателю по труду Д. Миллера ³⁾.

Полный сборник данных акустики скоро появится одновременно с изданием международных критических таблиц; так, например, будут помещены исчерпывающие данные о речи и слухе, составленные сотрудниками Телефонных Лабораторий Белл ⁴⁾. Критические таблицы будут также содержать материал Сэбина (Sabine) и позднейших работников в области архитектурной акустики.

В дальнейшем изложении мы будем исходить из обычных допущений механики, однако, один принцип, который в теории звука находит более частое применение, чем в других отделах физики, заслуживает специального рассмотрения. Этот принцип — суперпозиции (наложения), согласно которому общее смещение системы, находящейся под воздействием нескольких сил, мы можем определить, решая задачу для каждой силы отдельно и складывая затем полученные результаты. Он основан на том, что дифференциальные уравнения движения системы, с которыми мы встретимся, линейны; поэтому линейные сочетания решений данного уравнения также ему удовлетворяют. Кинематически нам придется иногда соединять целый ряд колебаний различных периодов для того, чтобы получить полное решение задачи.

В некоторых случаях последовательные собственные частоты системы находятся между собой в гармоническом соотношении; тогда находит применение ряд Фурье.

В других, не менее важных, случаях составляющие колебания не обязательно будут иметь частоты кратные одна другой; предупреждаем читателя, что соотношения между составляющими частотами не налагают никаких ограничений на применение принципа суперпозиции. Дело в том, что в задачах, с которыми мы встретимся, решение получается обычно в форме ряда нормальных функций, причем каждый член его предста-

¹⁾ Наши ссылки на труд Рэля „Теория звука“, относятся к его второму изданию (2 тома), Лондон, 1894 и 1896. Одинаково незаменима для студента книга проф. Лемба „Динамическая теория звука“, являющаяся образцом сжатости изложения и стиля. Труд Рэля недавно переиздан, и только что появилось второе издание „Звука“ Лемба (Лондон, 1925). Ссылки на Лемба в дальнейшем будут относиться к этой книге, если нет оговорок.

²⁾ Брэгг, „Мир звуков“; Бартон, „Руководство по звуку“, Поинтинг и Томсон, Учебник физики, том II — „Звук“, см. также А. Калähне, „Grundzüge der Akustik“, Leipzig, 1910 — 1913.

³⁾ Миллер Д., „Учение о музыкальных звуках“.

⁴⁾ См. также заметки о речи и слухе в приложении В.

влияет собой возможный вид колебаний данной системы, поэтому обычно достаточно исследовать лишь один типичный член ряда для того, чтобы иметь представление о поведении системы ¹⁾).

§ 2. Уравнение движения простой системы.

Мы видели, что первой задачей в теории звука является задача получения звуковых волн при помощи генератора или вибратора, приведенного в соприкосновение с звукопередающей средой. Чтобы решить эту задачу в общем виде, необходимо определить свойства самой колебательной системы, реакцию среды и условия распространения в среде. Поэтому логично начать наше изучение с рассмотрения простейшего вида колебательной системы.

Частица массы m прикреплена к упругой пружине так, что имеют место лишь небольшие передвижения в горизонтальном направлении, причем влиянием тяготения на систему можно пренебречь, а равно и какими бы то ни было „силами“ трения. Применяя обозначения, приведенные в начале книги, сила, потребная для того, чтобы вызвать небольшое отклонение ξ от положения равновесия, равна $s\xi$.

Поэтому потенциальная энергия системы при некотором смещении ξ

$$V = \frac{1}{2} s \xi^2,$$

а кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2.$$

Полная энергия системы для любого момента времени

$$W = T + V = \frac{1}{2} (m \dot{\xi}^2 + s \xi^2), \quad (1)$$

где m и s постоянны, а ξ и $\dot{\xi}$ — функции времени. Поскольку отсутствует расход энергии на трение или по другим причинам, можно применить принцип „сохранения энергии“; тогда имеем

$$\frac{dW}{dt} = m \dot{\xi} \frac{d\dot{\xi}}{dt} + s \xi \frac{d\xi}{dt} = 0 \quad (2)$$

или в принятых нами условных обозначениях, так как $\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}$

$$m \dot{\xi} + s \xi = 0. \quad (2a)$$

Последнее есть уравнение движения системы, не находящейся под действием внешних сил.

Если имеется внешняя сила $\Psi(t)$, действующая на систему (т. е. на массу m), то, применяя принцип „сохранения энергии“ в его общем виде, имеем вместо уравнения (2)

$$\frac{dW}{dt} = \dot{\xi} \Psi(t) = m \dot{\xi} \ddot{\xi} + s \xi \dot{\xi}, \quad (2')$$

¹⁾ К вопросу о нормальных функциях, частным случаем коих являются члены ряда Фурье, мы еще вернемся в § 28.

откуда более общее уравнение движения будет

$$m\ddot{\xi} + s\dot{\xi} = \Psi(t). \quad (2'a)$$

Теперь рассмотрим действие сил трения, например силы трения о воздух, действующей на массу m при ее колебаниях взад и вперед. Принято, и часто с достаточной точностью, считать силу трения прямо пропорциональной скорости движения, т. е.

$$\text{сила трения} = r \cdot \dot{\xi},$$

где r — „постоянная сопротивления“. Так как действие силы трения $r \cdot \dot{\xi}$ противоположно действию внешней силы $\Psi(t)$, то можем написать:

$$m\ddot{\xi} + r\dot{\xi} + s\xi = \Psi(t). \quad (3)$$

Это и есть полное уравнение движения „системы с одной степенью свободы“.

Данное уравнение определяет поведение системы под действием силы $\Psi(t)$, причем мы имеем право задать любые начальные условия, поскольку m , s и r остаются постоянными. На практике это означает, что координата смещения ξ не может быть взята чересчур большой, иначе „постоянные“ системы перестают быть постоянными и между простой теорией и наблюдаемыми (более сложными) явлениями появляются неожиданные расхождения. В таких случаях надо иметь в виду, что не уравнение (3) несправедливо, а неприменима простая теория.

Мы не будем здесь подробно рассматривать аналогию между уравнением (3) и общим уравнением электрической цепи, содержащей самоиндукцию, сопротивление и емкость, а именно:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E(t); \quad (i = \dot{q}). \quad (3')$$

Для студента, овладевшего теорией переменных токов, несомненно интересно отмечать все подобного рода аналогии; в связи с этим мы можем рекомендовать для попутного чтения сочинения Рэлея, том I, глава X, и Максвелла, том II, гл. V — VII.

§ 3. Собственные колебания.

Мы можем найти важнейшие свойства движения системы, решив линейное дифференциальное уравнение (3). В простейшем случае системе сообщены некоторые первоначальные отклонение и скорость, после чего она предоставлена самой себе. В этом случае $\Psi(t) = 0$, и решение уравнения содержит две произвольные постоянные:

$$\xi = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, \quad (4)$$

где λ_1 и λ_2 суть корни характеристического уравнения. Составляя характеристическое уравнение из (3) и (4):

$$(\lambda^2 m + \lambda r + s)\xi = 0,$$

и решив его:

$$\lambda = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}},$$

полагая далее

$$\frac{r}{2m} = \Delta \quad \text{и} \quad \frac{s}{m} = n^2,$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\Delta + i\sqrt{n^2 - \Delta^2} \equiv -\Delta + in', \\ \lambda_2 &= -\Delta - i\sqrt{n^2 - \Delta^2} \equiv -\Delta - in', \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и, следовательно:

$$\xi = e^{-\Delta t} (Ae^{in't} + Be^{-in't}). \quad (6)$$

Это решение можно переписать:

$$\xi = e^{-\Delta t} [(A + B) \cos n't + i(A - B) \sin n't] = e^{-\Delta t} (A' \cos n't + B' \sin n't),$$

или короче:

$$\xi = Ae^{-\Delta t} \sin (u't + \theta), \quad (6')$$

где A и θ — произвольные постоянные, подлежащие определению из начальных условий. Читатель легко убедится, что уравнению (6) могут удовлетворить все возможные начальные условия; можно вывести и соответствующее уравнение для скорости:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= nAe^{-\Delta t} \cos (n't + \theta + \varepsilon), \\ \varepsilon &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\Delta}{n'} \equiv \operatorname{tg}^{-1} \frac{\Delta}{\sqrt{n^2 - \Delta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Геометрически (6) есть уравнение синусоиды, амплитуда которой убывает с течением времени. Мерой убывания амплитуды служит постоянная Δ , называемая „показателем затухания“.

Величина затухания зависит от отношения сопротивления к массе $\left(\frac{r}{2m}\right)$, величина же расхода энергии $(r\dot{\xi}^2)$ в системе вследствие трения зависит только от коэффициента сопротивления r . Если бы в системе не было расхода энергии, частота колебаний, называемых в данном случае свободными, или собственными колебаниями, равнялась бы $f_0 \equiv \frac{n}{2\pi}$; это — частота, с которой система стремится колебаться, если ее внезапно возбудить. Эта частота несколько уменьшается вследствие затухания; действующая частота колебаний $f_0' \equiv \frac{1}{2\pi} \sqrt{n^2 - \Delta^2}$. Если Δ сделать достаточно большим, например $\Delta \geq n$ (при увеличении r и уменьшении m и вместе с тем s), $\sqrt{n^2 - \Delta^2}$ может обратиться в нуль или стать мнимым, тогда свободные колебания уже не могут существовать. Для анализа последнего случая положим в момент времени $t = 0$, $\xi = \xi_0$ и $\dot{\xi} = 0$. Тогда, беря выражение (6) в форме

$$\xi = e^{-\Delta t} (Ae^{t\sqrt{\Delta^2 - n^2}} + Be^{-t\sqrt{\Delta^2 - n^2}})$$

и вычисляя постоянные A и B , имеем

$$\xi = \frac{\xi_0}{2\sqrt{\Delta^2 - n^2}} [(\sqrt{\Delta^2 - n^2} + \Delta)e^{-(\Delta - \sqrt{\Delta^2 - n^2})t} + (\sqrt{\Delta^2 - n^2} - \Delta)e^{-(\Delta + \sqrt{\Delta^2 - n^2})t}]. \quad (7)$$

Таким образом, движение представляет собой сумму двух движений, амплитуды которых неравномерно, хотя обычно довольно быстро, убывают. Следует обратить внимание, что данное решение не годится для критического затухания, при котором $\Delta = n$; решение для этого случая

предоставляется читателю в качестве одной части задачи № 2 в конце этой главы.

Резюмируем: мы нашли собственную или характеристическую частоту системы, т. е. частоту, с которой она стремится колебаться бесконечное время; однако, при этом оказалось, что эти собственные колебания могут весьма быстро затухать или даже совсем отсутствовать, если показатель затухания чересчур велик.

§ 4. Периодическая движущая сила.

Рассмотрим простую колебательную систему под действием периодической силы $\Psi(t) = \Psi_0 e^{i\omega t}$. Решение уравнения

$$m\ddot{\xi} + r\dot{\xi} + s\xi = \Psi_0 e^{i\omega t} \quad (3)$$

будет состоять из двух частей, соответствующих „переходному“ и „установившемуся“ состояниям.

Множитель, полученный в предыдущем параграфе, выражает временную реакцию системы на внезапно приложенное усилие и с течением времени его амплитуда становится весьма малой. Член установившегося режима выражает тенденцию системы следовать, по возможности, за движущейся силой; после исчезновения первоначального „переходного“ колебания член установившегося режима достаточно полно описывает движение, если только движущая сила не получает дальнейших изменений. (Здесь мы предпочитаем вести изложение с точки зрения физического опыта, решая задачу шаг за шагом; следует, однако, отметить, что, поступая так, мы несколько жертвуем строгостью доказательств для получения более конкретной картины).

Пренебрегая переходными явлениями, мы можем принять установившееся движение в форме $\xi = Ce^{i\omega t}$ за частное решение уравнения (3). Тогда, так как $\dot{\xi} = i\omega\xi$ и $\ddot{\xi} = -\omega^2\xi$:

$$(-m\omega^2 + ir\omega + s)\xi = \Psi_0 e^{i\omega t}$$

и

$$\xi = \frac{\Psi_0}{i\omega Z} e^{i\omega t},$$

где

$$Z = r + i\left(m\omega - \frac{s}{\omega}\right). \quad (8)$$

В алгебре комплексных величин (которая необходима при решении задач, подобных этой) выводится:

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-i\varphi}, \quad (9)$$

где $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$.

Следовательно, амплитуда и скорость соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\Psi_0}{i\omega Z} e^{i(\omega t - \varphi)}, \\ \dot{\xi} &= i\omega\xi = \frac{\Psi_0}{Z} e^{i(\omega t - \varphi)}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и

где

$$\varphi = \arctg \left(\frac{m\omega - \frac{s}{\omega}}{r} \right) \quad \text{и} \quad Z = \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{s}{\omega}\right)^2}.$$

Читатель не должен смущаться тем, что буква Z употребляется как для комплексного сопротивления, так и для его абсолютной величины; из общего контекста каждый раз очевидно, что именно имеется в виду. Прежде, чем идти дальше, обратим внимание на:

- а) разность фаз в 90° между ξ и $\dot{\xi}$;
- б) сдвиг фаз между движущей силой и получающейся скоростью;
- в) величину Z , называемую полным сопротивлением, которая имеет минимальное значение $Z_0 = r$, когда

$$\omega^2 = \frac{s}{m} [= (2\pi f_0)^2, \text{ § 3}].$$

К более подробному рассмотрению этих соотношений мы вернемся позже.

§ 5. Полное решение для вынужденных и свободных колебаний.

Чтобы определить поведение системы в общем случае, надо сложить решения для вынужденных и свободных колебаний и заставить их удовлетворить заданным начальным условиям.

Сначала рассмотрим вынужденные колебания, как более важные для практических вычислений. Обычно движущая сила выражена рядом, типичным членом которого является:

$$C_1 \cos \omega_1 t \text{ или } D_1 \sin \omega_1 t.$$

Таким образом, мы не делаем большой ошибки, пользуясь только вещественной составляющей вращающегося единичного вектора $e^{i\omega t}$, т. е. полагая $\Psi = \Psi_0 \cos \omega t$ для вынужденных колебаний. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= \frac{\Psi_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi), \\ \dot{\xi} &= \frac{\Psi_0}{\omega Z} \sin(\omega t - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Ясно, что мнимые составляющие, если их всюду употреблять, будут также удовлетворены, причем в решениях просто синусы заменяются косинусами с соответствующими знаками.

Добавляя члены переходного режима (выражения 6, 6а § 3), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= Ae^{-\Delta t} \sin(n't + \theta) + \frac{\Psi_0}{\omega Z} \sin(\omega t - \varphi), \\ \dot{\xi} &= nAe^{-\Delta t} \cos(n't + \theta + \varepsilon) + \frac{\Psi_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Выражения (11) с A и θ , удовлетворяющими начальным условиям, характеризуют движение системы под воздействием простой периодической силы. Применяя методы ряда и интеграла Фурье, мы можем всегда вычислить сумму таких решений; которая удовлетворит заданным начальным условиям и даст решение задачи для движущей силы любого вида.

§ 6. Начальные условия при воздействии периодической движущей силы.

Достаточное представление о поведении системы при периодическом возбуждении можно получить, если рассматривать уравнения (11) сначала как функции только времени, а затем как функции только частоты, с которой система возбуждается.

Полагая частоту $f = \frac{\omega}{2\pi}$ постоянной, начнем с состояния покоя системы, когда

$$\xi = \dot{\xi} = 0 \text{ при } t = 0.$$

При этих условиях

$$\left. \begin{aligned} 0 &= A \sin \theta + \frac{\Psi_0}{\omega Z} \sin(-\varphi) \text{ (амплитуда),} \\ 0 &= nA \cos(\theta + \varepsilon) + \frac{\Psi_0}{Z} \cos(-\varphi) \text{ (скорость).} \end{aligned} \right\} (12)$$

Строгое решение этих уравнений для A и θ гораздо более затруднительно, чем это кажется с первого взгляда и приходится делать некоторые допущения.

ε обычно мало ($\sin \varepsilon = \frac{\Delta}{n}$, § 3) и его можно для симметрии не писать. Возвышая в квадрат и складывая, имеем

$$A^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{\Psi_0^2}{\omega^2 Z^2} \left(\sin^2 \varphi + \frac{\omega^2}{n^2} \cos^2 \varphi \right) = \frac{\Psi_0^2}{\omega^2 Z^2} \cdot Q^2.$$

Выбирая отрицательный корень, в соответствии с условиями, имеем

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\Psi_0}{\omega Z} \cdot Q; \quad Q = \sqrt{\sin^2 \varphi + \frac{\omega^2}{n^2} \cos^2 \varphi}; \\ \sin \theta &= -\frac{1}{Q} \sin \varphi, \quad \cos \theta = \frac{\omega}{n} \frac{1}{Q} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} (13)$$

Для $\omega = n$ (т. е. $f = f_0$) θ равен отрицательному φ , $\theta = -\varphi$ и в момент $t = 0$ амплитуда A равна отрицательной величине установившейся амплитуды $\frac{\Psi_0}{\omega Z}$ вынужденного колебания.

Вообще же

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\Psi_0}{\omega Z} [\sin(\omega t - \varphi) Q e^{-\Delta t} \sin(n't + \theta)], \\ \dot{\xi} &= \frac{\Psi_0}{Z} \left[\cos(\omega t - \varphi) - \frac{n}{\omega} Q e^{-\Delta t} \cos(n't + \theta + \varepsilon) \right]; \end{aligned} \right\} (14)$$

причем θ определяется из (13), как указано выше.

Поведение системы с момента $t = 0$ следующее: начиная с положения покоя, амплитуда (или, по желанию, скорость) может быть рассмотрена как сумма двух амплитуд: „переходящего“ и „установившегося“ колебаний, одинаковых по величине, но противоположных по знаку.

Они точно противоположны, строго говоря, только в начальный момент, так как обычно $n \neq n' \neq \omega$. В начале движения „установившееся“ колебание при непрерывно убывающей амплитуде создает „биения“ с вынужденным колебанием, причем видимым результатом этой интерференции является постепенный асимптотический рост результирующей амплитуды, достигающей своей установившейся величины после прекращения „установливающегося“ колебания. В процессе этого роста амплитуды (кажущаяся) частота не соответствует ни собственной частоте „переходного“ колебания, ни частоте приложенной силы; она является составной из них обеих и меняется, приближаясь по мере исчезновения „переходного“ колебания к частоте установившегося режима. Наше ухо у диафрагмы телефона часто может различать „переходный“ тон, если внезапно начинает действовать периодическая движущая сила, особенно когда частота этой силы значительно отличается от основной собственной частоты диафрагмы.

§ 7. Периодическая движущая сила с переменной частотой.

Допустим, что установившееся состояние колебаний наступило и пусть затем частота движущей силы меняется. Скорость и амплитуда (уравнения 10 и 11) суть соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\Psi_0}{Z} \cos(\omega t - \varphi), \\ \xi &= \frac{\Psi_0}{\omega Z} \sin(\omega t - \varphi); \\ \text{где } Z &= \sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{s}{\omega}\right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{m\omega - \frac{s}{\omega}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Иначе, рассматривая только максимальные значения, имеем

$$\dot{\xi}_0 = \frac{\Psi_0}{\sqrt{r^2 + \left(m\omega - \frac{s}{\omega}\right)^2}}, \quad \xi_0 = \frac{\dot{\xi}_0}{\omega}. \quad (16)$$

Приводимая таблица дает значения ряда величин при постоянном Ψ_0 ; из нее читатель может составить себе представление о поведении системы в зависимости от частоты движущей силы.

f	ω	$ Z $	$\left \frac{1}{Z}\right $	$\left \frac{1}{\omega Z}\right $	φ
0	0	∞	0	$\frac{1}{s}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2\pi}(n - \Delta)$	$(n - \Delta)^{1)}$	$\sqrt{2r}$	$\frac{1}{\sqrt{2r}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(n - \Delta)r}$	$-\frac{\pi}{4}$
$f_0 = \frac{n}{2\pi}$	$n = \sqrt{\frac{s}{m}}$	r	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{nr}$	0
$\frac{1}{2\pi}(n + \Delta)$	$(n + \Delta)^{1)}$	$\sqrt{2r}$	$\frac{1}{\sqrt{2r}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}(n + \Delta)r}$	$+\frac{\pi}{4}$
∞	∞	∞	0	0	$+\frac{\pi}{2}$

Читателю предоставляется проверить эти данные и построить график зависимости ξ_0 и $\dot{\xi}_0$ от частоты.

Если откладывать частоты в логарифмическом масштабе или октавами, то кривая скорости будет симметрична относительно точки $f = f_0$.

Эта частота соответствует наибольшей скорости и называется „резонансной частотой“. Если увеличить в n раз масштаб ординат для амплитуды по сравнению с масштабом для скоростей, то вершины обеих кривых при $f = f_0$ почти совпадут; однако, для $0 \leq f \leq f_0$ кривая амплитуд будет лежать выше кривой скоростей и, наоборот, для точек после резонанса она пойдет ниже кривой скоростей. По отношению к f_0 она не

¹⁾ Приближенно: справедливо при Δ^2 малом по сравнению с n^2 .

симметрична, при этом амплитуда при $f=0$ (сравни скорость) равна $\frac{\Psi_0}{s}$, как это и следует из статической теории, или теории равновесия.

Разность $\frac{2\Delta}{2\pi}$ между частотами, для которых $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ является общепринятой мерой остроты или притупленности кривой резонанса. Для того чтобы система хорошо отзывалась на движущую силу, частота которой меняется в широких пределах, необходима тупая кривая резонанса или

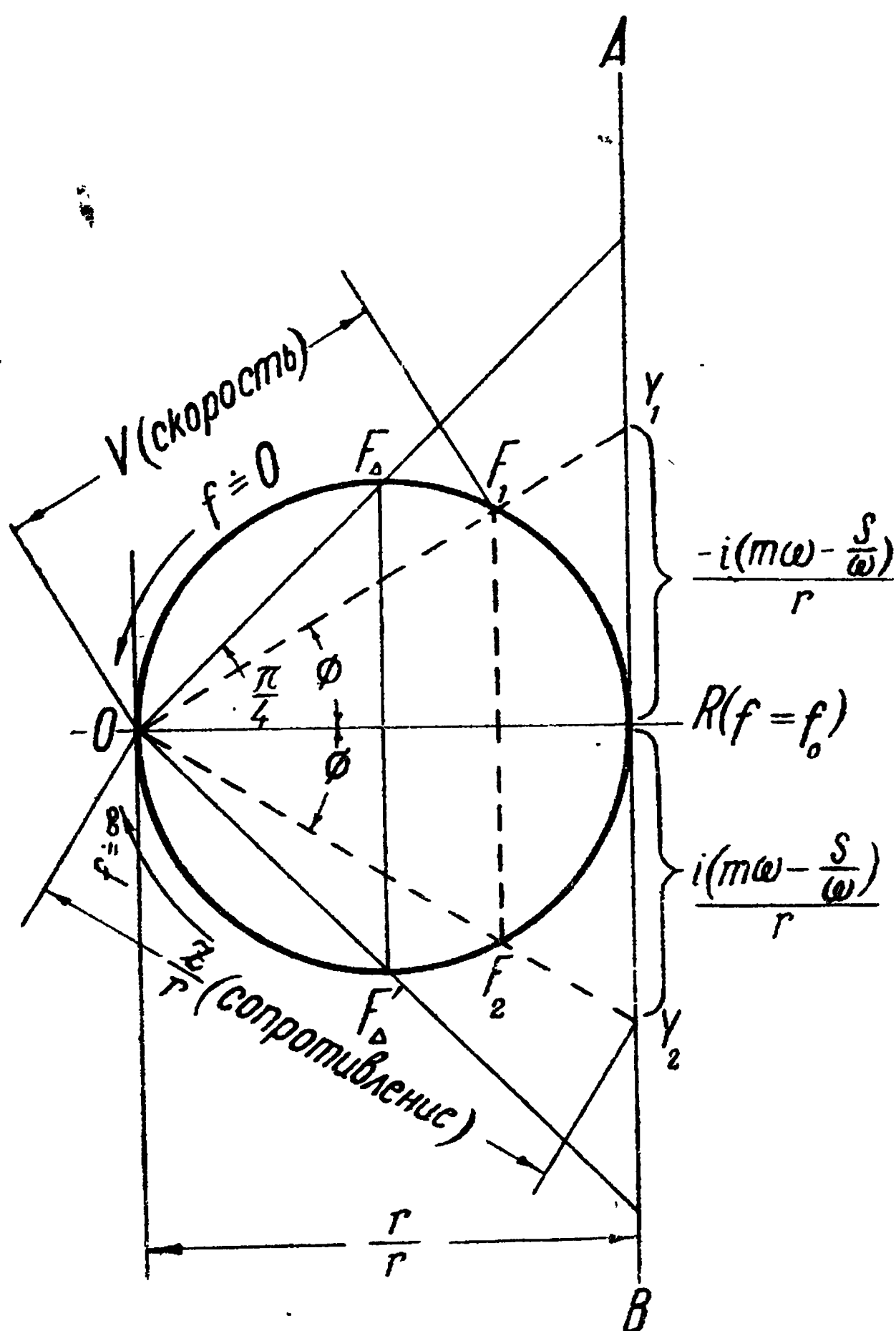


Рис. 1. Круговая диаграмма полного сопоставления.

тупая настройка; это достигается увеличением затухания, что попутно дает преимущество уменьшения интерференции, происходящей от собственных или переходных вибраций, а следовательно, увеличивает применимость таких систем. Системы с острой настройкой занимают определенное место в одночастотных приборах, как, например, в камертонах и вообще резонаторах.

Экспериментально затухание системы с тупой настройкой лучше всего определить по форме кривой резонанса для скорости; затухание системы с острой настройкой следует определять по скорости убывания собственных колебаний.

Фазовые соотношения между силой, полным сопротивлением и скоростью наглядно видны на круговой диаграмме ¹⁾, впервые примененной Кеннелли и Пирсом при исследовании телефона.

В простейшей форме она изображена на рис. 1. В векторном обозначении $Z = r + i\left(m\omega - \frac{s}{\omega}\right)$, т. е., если $Z = |Z|e^{i\varphi}$, то $\frac{1}{Z} = \frac{1}{|Z|}e^{-i\varphi}$.

В целях упрощения будем для установившейся переменной силы изучать отношение скорости при частоте f к скорости при резонансе (f_0), т. е.:

$$V = V_0 e^{-i\varphi} = \frac{r}{r + i\left(m\omega - \frac{s}{\omega}\right)} = \frac{r}{Z}. \quad (17)$$

На оси X откладываем отрезок $OR = \frac{r}{r} = 1$ и принимаем его за вектор скорости при резонансе, измеренный в произвольных единицах. На этом отрезке как на диаметре строим окружность и проводим касательную BRA параллельно оси Y . Тогда для произвольной прямой OF_1Y_1 отрезок $\overline{OF_1}$ является обратным отрезку $\overline{OY_1}$, согласно свойству инверсии между точками прямой и точками касательной окружности единичного диаметра. Для некоторой части $f < f_0$ отложен вектор RY_2 , равный отношению реактивного сопротивления к активному. Тогда $OY_2 = \frac{Z}{r}$, а OF (зеркальное изображение OF_2) равен $\frac{r}{Z}$. Нанося далее величины реактивных сопротивлений для всех значений $0 \leq f \leq \infty$, увидим, что точка F_1 — конец вектора скорости — будет перемещаться по окружности, проходя при $f = f_0$ через точку R .

Точки F_Δ и F'_Δ , очевидно, будут соответствовать частотам $f_0 - \frac{\Delta}{2\pi}$ и $f_0 + \frac{\Delta}{2\pi}$.

Сходная диаграмма получилась бы для вектора амплитуд, однако, следует заметить, что геометрическое место его конца не есть окружность. Эту кривую, которая почти замкнута, следует повернуть вокруг точки O на угол $-\frac{\pi}{2}$, чтобы выразить этим отставание векторов амплитуд от соответствующих векторов скоростей. Другие диаграммы векторов амплитуды и скорости читатель может найти в книге Кеннелли „Электрические вибрационные приборы“ (Макмиллан, 1923). В общем круговая диаграмма подводит итог кинематике простой колебательной системы при установившемся режиме.

§ 8. Физическая природа постоянных системы.

Перейдем теперь от кинематических рассуждений (когда m , r и s являются просто параметрами в уравнении) к более физическому рассмот-

¹⁾ „Известия американской академии искусств и наук“, 48, 1912, стр. 113. Когда на телефонную мембрану действует переменный ток, то колебания ее вызывают появление противоэлектродвижущей силы. Последняя пропорциональна скорости мембраны и, следовательно, при данной частоте — силе тока. Она проявляется как составляющая сопротивления прибора; причем эта составляющая определяется как разность между сопротивлением свободно колеблющейся мембраны и сопротивлением ее, когда движение предотвращено. Кеннелли и Пирс называли эту составляющую „сопротивлением движения“ и указывали путь ее экспериментального определения.

Круговые диаграммы широко применяются в литературе об электрических колебаниях, многие ссылки на которую даны в приложении В. См. напр. Кеннелли и Тэйлор, Proc. Am. Phil. Soc., 55, 1916, стр. 415; Хапеман и Хехт, Phys. Zeit., 20, 1919, стр. 104 и там же 21, 1920, стр. 264; Вегель, J. A. I. E. E. 1921, стр. 791.

рению природы этих „постоянных“. Практически каждый из этих параметров представляет некоторое „действующее“ или среднее значение, которое с известным приближением заменяет полное влияние инерции или сопротивления, или упругости системы. При этом среднее значение каждой постоянной выведено с учетом по отношению к координате ξ , через которую выражено движение системы. Таким образом, в определение каждой постоянной входят различные геометрические и механические соображения.

Например, значительные успехи в исследовании телефонной диафрагмы были достигнуты в предположении о возможности замены такой весьма сложной системы эквивалентной простой системой с постоянными m , r , s . Правда, логически это предположение не обосновано, так как для того, чтобы определить m и s , нужно сначала определить форму, которую принимает диафрагма при своем изгибе, а это, особенно если напряжение распределено по поверхности диафрагмы неравномерно, само по себе представляет весьма трудную механическую задачу. В действительности диафрагма есть система с большим числом степеней свободы и, следовательно, форма ее колебания будет меняться с частотой; у колеблющейся диафрагмы нет постоянной действующей массы. Действительное значение этих положений станет более ясным, когда мы подойдем к рассмотрению систем с несколькими степенями свободы; пока нам достаточно лишь упомянуть об ограничениях упрощенной теории. Описанные в этой главе методы в применении к действительным системам зачастую дают достаточно отчетливую картину явлений и в этом их единственное оправдание.

В случае наличия сопротивления задача еще сложнее. Коэффициент сопротивления или трения в случае изгиба прута или пластинки должен учитывать не только внутреннее трение, происходящее от скольжения всех элементарных частиц относительно друг друга, но также сопротивление воздуха или, в более общем выражении, влияние помещения колебательной системы в среду. Прежде всего системой каждый раз, когда она соприкасается со средой, излучается звуковая энергия, а это означает постоянный расход энергии, подводимой к системе. Мощность, отдаваемая системой среде при излучении, равна, как будет выведено позже $R\dot{\xi}^2$, где R имеет размерность сопротивления. R является важной постоянной, характерной для среды; она может быть названа сопротивлением излучения.

Однако, кроме излучения, существует обычно еще собственно—трение вследствие движения слоев окружающего воздуха, когда уже играет роль вязкость среды. В рассмотренном случае простой системы сопротивление всецело зависело от этого последнего явления; возможно, если нужно получить большое затухание соответственным устройством системы, специально использовать трение воздуха или вязкость. Если включить сопротивление трения воздуха в сопротивление системы, то общее сопротивление, на которое работает система есть $r = r_{\text{изл.}} + R_{\text{внутр.}}$ и расходуемая мощность

$$r\dot{\xi}^2 = (r_1 + R)\dot{\xi}^2. \quad (18)$$

Электрическая аналогия здесь очевидна.

Имеется старое утверждение о том, что противодействующая сила трения не может быть строго пропорциональна скорости движения. Мы все же считаем, что гипотеза линейной зависимости довольно хорошо подтверждена опытом для тех небольших скоростей, с которыми мы имеем дело в звуке и колебательных системах. Для тел, быстро движущихся в воздухе (например артиллерийских снарядов), действительно много энер-

гии рассеивается в вихревом движении и соответственная реакция или сила в этом случае пропорциональна квадрату скорости. Поскольку мы изучаем чисто поступательное движение и малые скорости, мы вправе написать: сила трения $= \text{const} \cdot \mu \cdot \dot{\xi}$ (μ — коэффициент вязкости).

В одном из последующих параграфов будет дан хороший пример действия вязкости ¹⁾.

В заключение, для полноты рассмотрения природы сопротивления и упругости, отметим явления, происходящие, если заставить систему колебаться с настолько большими амплитудами, что начинает играть роль упругий гистерезис. В этом случае как r , так и s зависит от амплитуды движения и простая теория неприменима; вместо простых постоянных приходится подставлять ряды $r = f_1(\xi)$ и $s = f_2(\xi)$ и решение задачи становится настолько затруднительно, что требует введения специальных методов. Анализ подобных случаев выходит за пределы настоящей книги; читатель может по теории этого вопроса для простой системы обратиться к Рэлею (§§ 67, 68). У Рэлея также в приложении к главе V (II, стр. 480) разобраны некоторые свойства нелинейных колебаний сложной системы ²⁾.

§ 9. Теория равновесия или низкой частоты; круглая мембрана.

Статическая теория или теория равновесия (более логично назвать ее теорией низкой частоты) часто полезна при изучении таких задач, как колебания диафрагм и т. п.

Мы покажем ее применение к одной интересной задаче и попутно получим кое-какие сведения об определении действующих массы и упругости.

Тонкая круглая мембрана с закрепленными краями может колебаться различными способами. Из симметричных относительно оси колебаний мы рассмотрим основной или главный вид. Очевидно, если мы сумеем получить правильное представление о форме мембраны в положении наибольшего ее растяжения, то мы сможем проделать приближенное вычисление действующих массы и упругости и таким образом определить собственную частоту этого вида колебания. Можно полагать, что для круглой мембраны без собственной упругости, равномерно нагруженной силой P на единицу площади при малых смещениях:

$$\xi = \frac{Pa^2}{4\tau} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \xi_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad (19)$$

где a — радиус закрепленной окружности мембраны, τ — натяжение и ξ_0 — центральное или максимальное смещение. Предположим, что эта параболическая форма смещения сохраняется при частоте главного вида колебаний; при этом определим m и s через $\dot{\xi}_0$ и ξ_0 . Суммируя кольцевые элементы массы $2\pi r dr$, получаем для кинетической энергии системы

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^a \dot{\xi}_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 2\pi r dr = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \pi a^2\right) \dot{\xi}_0^2. \quad (20)$$

¹⁾ Читатель, интересующийся вязкостью, гидродинамическим сопротивлением и т. д., может обратиться к гл. III, IV, V соч. Драйда, „Механические свойства жидкостей“, 1924. Это весьма полезная книга и на нее мы будем ссылаться и в дальнейшем.

²⁾ После Рэлея (§§ 67, 68), читатель может обратиться к ч. II ст. Ветцмана Phis. Zeit, XXVI, 1925, стр. 740, „Современные проблемы акустики“. Эта часть статьи рассматривает нелинейные колебания и т. д. и содержит ссылки на более раннюю работу Ветцмана.

Таким образом, действующая масса равна одной трети полной массы мембраны. Потенциальная энергия может быть вычислена по работе, произведенной всей силой при растягивании мембраны, учитывая изменение P с изменением ξ_0 . Так как

$$P = \frac{4\tau\xi_0}{a^2} \text{ и } d\xi = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) d\xi_0,$$

$$V = \int_0^{\xi_0} \int_0^a 2\pi r dr P d\xi = \frac{8\pi\tau}{a^2} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r dr \int_0^{\xi_0} \xi_0 d\xi_0.$$

Получаем •
$$V = \frac{8\pi\tau}{a^2} \left(\frac{a^2}{4}\right) \frac{\xi_0^2}{2} = \pi\tau\xi_0^2 = \frac{1}{2} s\xi_0^2,$$

откуда

$$s = 2\pi\tau. \quad (21)$$

Тогда собственная частота (пренебрегая затуханием) будет

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6\tau}{\rho a^2}} = \frac{1,22}{\pi a} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (22)$$

Этот результат оказывается очень точным, в чем мы убедимся, сравнив его с полученным более строгим путем в следующем параграфе.

§ 10. Общая теория круглой мембраны; Бесселевы функции.

Задача о симметричных колебаниях круглой мембраны весьма важна, и ее общее решение требует применения наиболее интересных и полезных в аналитической механике математических приемов. Пренебрегая, как и ранее, затуханием, переработаем и применим к нашим обозначениям (§ 9) оригинальный вывод Лемба („Звук“, § 54): результирующее усилие, приложенное к окружности радиуса r , равно $\tau \cdot 2\pi r \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r}$ и нормально к плоскости покоящейся мембраны, а разность усилий на краях кольца, внутренний и наружный радиусы которого суть r и $r + dr$, дает силу

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\tau \cdot 2\pi r \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) dr.$$

Приравнивая это выражение величине $\rho \cdot 2\pi r dr \cdot \ddot{\xi}$, которая представляет меру изменения количества движения того же кольца, получаем

$$\rho \cdot \ddot{\xi} = \frac{\tau}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \xi}{\partial r} \right). \quad (23)$$

Если теперь искать решение уравнения (23) в форме

$$\xi = A\Phi(r)e^{int},$$

то коэффициент, зависящий от t , может быть исключен из дифференциального уравнения и мы получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right) \Phi(r) = 0, \quad (24)$$

где $K^2 = \frac{n^2 \rho}{\tau}$. Это—уравнение Бесселя (простейший вид), и если примем решение в форме

$$\Phi(kr) = a_0 + a_1 kr + a_2 k^2 r^2 + \dots$$

и определим коэффициент, подставляя его в (24), то найдем

$$\Phi(kr) = J_0(kr) \equiv 1 - \frac{k^2 r^2}{2^2} + \frac{k^4 r^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots, \quad (25)$$

что представляет собой Бесселеву функцию первого вида нулевого порядка. Общее решение (24) содержит две произвольных постоянных и имеет вид:

$$\xi = [AJ_0(kr) + BK_0(kr)]e^{int}, \quad (26)$$

где K_0 есть одна из Бесселевых функций второго вида нулевого порядка. $K_0(kr)$ обращается в ∞ при $r=0$, т. е. не удовлетворяет граничным условиям; поэтому должно быть $B=0$. Решение задачи (так как $\xi = \xi_0 e^{int}$ при $r=0$ и $\xi=0$ при $r=a$) зависит от таких значений k , которые удовлетворяют уравнению

$$\xi_a = \xi_0 J_0(ka) = 0, \text{ т. е. } J_0(ka) = 0. \quad (27)$$

Обращаясь к таблицам (см. Грей и Мэтью „Бесселевы функции“ или Рэлей, том I, стр. 321), находим для корней уравнения (27):

$$\frac{ka}{\pi} = 0,766; \quad 1,757; \quad 2,755 \dots$$

Возьмем для примера величину $k_1 = 0,766 \frac{\pi}{a}$ и пусть $0 \leq r \leq a$. Тогда мы

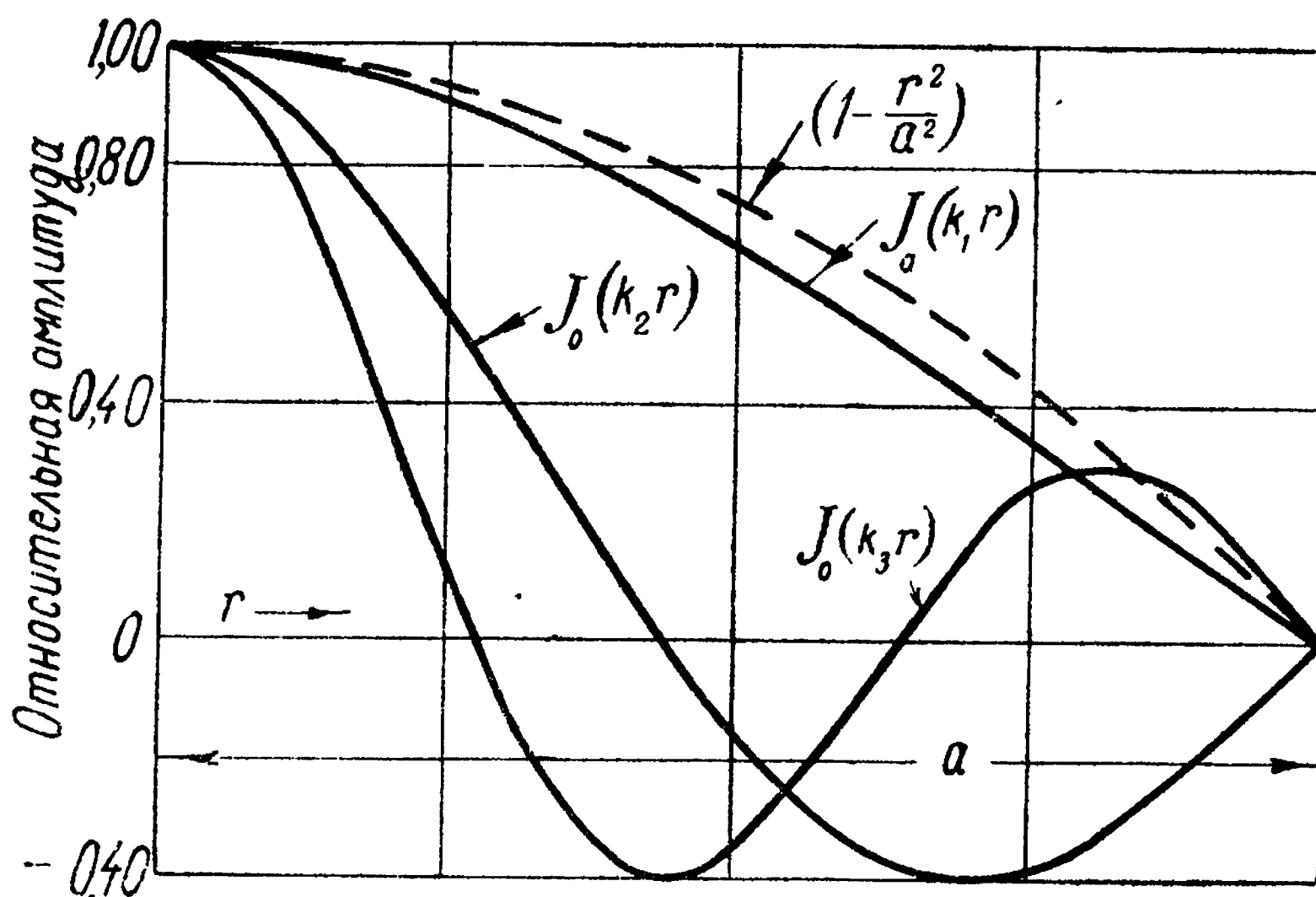


Рис. 2. Форма колеблющейся круглой мембраны.

можем определить форму растянутой мембраны для самой низкой собственной частоты из уравнения

$$\xi = \xi_0 J_0(k_1 r) = \xi_0 J_0\left(0,766 \pi \frac{r}{a}\right); \quad (27a)$$

при этом собственная частота этого рода колебаний равна:

$$f_1 = \frac{n_1}{2\pi} = \frac{k_1}{2\pi} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \frac{1,20}{\pi a} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}. \quad (28)$$

Этот результат хорошо согласуется с полученным ранее (уравнение 22 § 9), когда мы принимали параболоидальную форму растянутой мембраны для основного вида колебания.

Для более ясного представления о поведении мембраны на рис. 2 нанесены три функции:

$$\frac{\xi}{\xi_0} = J_0(kr), \quad k = k_1, k_2, k_3;$$

для значений $0 \leq r \leq a$. Пунктирная кривая обозначает сечение параболоида, которое почти совпадает с кривой $J_0(k_1r)$. Для дальнейшего построения графиков Бесселевых функций мы будем пользоваться „Таблицами функций“ Jahnke и Emde.

Последующее изложение уже будет носить более общий характер благодаря введению в рассмотрение затухания системы. Будем учитывать расход энергии на трение и излучение введением коэффициента R , отнесенного к единице поверхности, тогда вместо уравнения (23) получаем

$$\frac{R\dot{\xi} + \rho\ddot{\xi}}{\tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} \right). \quad (23a)$$

Полагая $\xi = A\Phi(r)e^{\lambda t}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right) \Phi(r) &= 0, \\ \rho\lambda^2 + \lambda R + k^2\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

где

Таким образом (ср. § 3)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= J_0(kr) (Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}), \\ \lambda_1 &= -\Delta + in'; \quad \lambda_2 = -\Delta - in'; \\ n' &= \sqrt{n^2 - \Delta^2}, \quad n^2 = k^2 \frac{\tau}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

где

Пусть теперь мембрана получила некоторую начальную деформацию вида $\xi_0 J_0(k_j r)$ и предоставлена самой себе; тогда ясно, что после надлежащего определения постоянных A и B (ср. § 6) мы получаем для амплитуды

$$\xi = \xi_0 J_0(k_j r) e^{-\Delta t} \cos n'_j t, \quad (29)$$

где $(k_j r)$ есть корень J_0 , как и ранее. Собственные частоты, измененные (вследствие наличия затухания), теперь выражаются как

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} n'_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1^2 \tau}{\rho} - \Delta^2} \text{ и т. д.} \quad (28a)$$

Если теперь начальный изгиб мембраны не соответствует одной из ее естественных форм, а имеет произвольный вид (например, форма конуса), то возможно (и это можно доказать путем, аналогичным доказательству синтеза Фурье) составить ряд

$$\xi = A_1 J_0(k_1 r) e^{-\Delta_1 t} \cos(n_1 t + \theta_1) + A_2 J_0(k_2 r) e^{-\Delta_2 t} \cos(n_2 t + \theta_2) + \dots, \quad (29)$$

который будет удовлетворять всем условиям задачи.

Колебание в этом случае, до тех пор пока оно не заглушено совсем затуханием, является результирующим всех возможных симметричных собственных колебаний системы, причем соответствующие амплитуды A_1 и A_2 и фазы θ_1 , θ_2 выбираются так, чтобы при наложении образовать исходную форму мембраны. Предположим теперь, что мембрана приводится в движение силой $\Psi_0 e^{i\omega t}$ на единицу поверхности; мы хотим опре-

делить общие законы движения мембраны при изменении частоты движущей силы. Вместо уравнения (23а) имеем

$$R\dot{\xi} + \rho\ddot{\xi} = \frac{\tau}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \Psi_0 e^{i\omega t} \quad (30)$$

и если $\dot{\xi} = i\omega\xi$ и $\ddot{\xi} = -\omega^2\xi$ (теория установившегося режима)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \chi^2 \xi &= -\frac{\Psi_0}{\tau} e^{i\omega t}, \\ \chi^2 &= \frac{\rho\omega^2 - i\omega R}{\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Член, стоящий справа в уравнении (31), не является функцией радиуса r ; если бы этот член равнялся нулю, то решением уравнения было бы выражение $AJ_0(\chi r)$.

Отсюда заключаем, что решением (31) является

$$\xi = -\frac{\Psi_0 e^{i\omega t}}{\chi^2 \tau} + AJ_0(\chi r). \quad (32)$$

Определяем A из граничного условия $\xi(a) = 0$

$$A = \frac{1}{J_0(\chi a)} \frac{\Psi_0 e^{i\omega t}}{\chi^2 \tau}.$$

Тогда амплитуда

$$\xi(r) = \left[\frac{J_0(\chi r)}{J_0(\chi a)} - 1 \right] \frac{\Psi_0 e^{i\omega t}}{\chi^2 \tau} \quad (33)$$

и скорость (ср. уравнение 10)

$$\dot{\xi}(r) = - \left[1 - \frac{J_0(\chi r)}{J_0(\chi a)} \right] \frac{i\omega \Psi_0 e^{i\omega t}}{\chi^2 \tau}. \quad (33a)$$

В этом выражении для скорости полное сопротивление на единицу поверхности будет

$$Z(r) = \frac{\chi^2 \tau}{-i\omega \left[1 - \frac{J_0(\chi r)}{J_0(\chi a)} \right]} - \frac{R + i\rho\omega}{\left[1 - \frac{J_0(\chi r)}{J_0(\chi a)} \right]}. \quad (33b)$$

Полное исследование уравнений (33 — 33b) и определение поведения мембраны при изменении движущей частоты затруднительно вследствие присутствия комплексной переменной χr , являющейся аргументом Бесселевой функции. Однако, сразу видно, что для частоты, равной нулю (так как $\chi_0 = 0$ и $J_0(0) = 1$) $Z = \infty$ и скорость равна нулю. Если бы не было коэффициента сопротивления R , который мы ввели в χ^2 , мы получали бы $J_0(\chi a) = 0$ при $\omega = n_1, n_2$ и т. д. ($n_1, n_2, \dots$ суть умноженные на 2π резонансные частоты мембраны).

Для этих частот Z оказалось бы ничтожно малым, а скорость возрастала бы до бесконечности. И без приведения Z к рациональной форме и вычисления его абсолютной величины очевидно, что Z будет иметь ряд минимальных значений, соответствующих упомянутым точкам, причем эти минимальные значения растут с увеличением R . Следует также заметить, что, поскольку вид колебаний меняется с частотой, то и действующие масса и упругость должны изменяться с частотой.

Кривая на рис. 3, показывающая изменение действующей массы, заимствована у Р. Вегеля и была построена им в связи с его работой по исследованию телефона.

Уравнение (33b) удовлетворяет граничному условию $Z = \infty$ при $r = a$. Можно произвести интересную проверку уравнения (33b), вычисляя для низких частот величину полного сопротивления на единицу поверхности в центре мембраны, для которого $J_0(\kappa r) = 1$. Так как нам известно, что при низких частотах под влиянием однородного давления мембрана принимает форму параболоида и только немного отклоняется от нее при первой резонансной частоте, то можно ограничиться лишь двумя членами Бесселевой функции, т. е.

$$J_0(\kappa a) \approx 1 - \frac{\kappa^2 a^2}{4} \quad (\text{ср. уравнения 25})$$

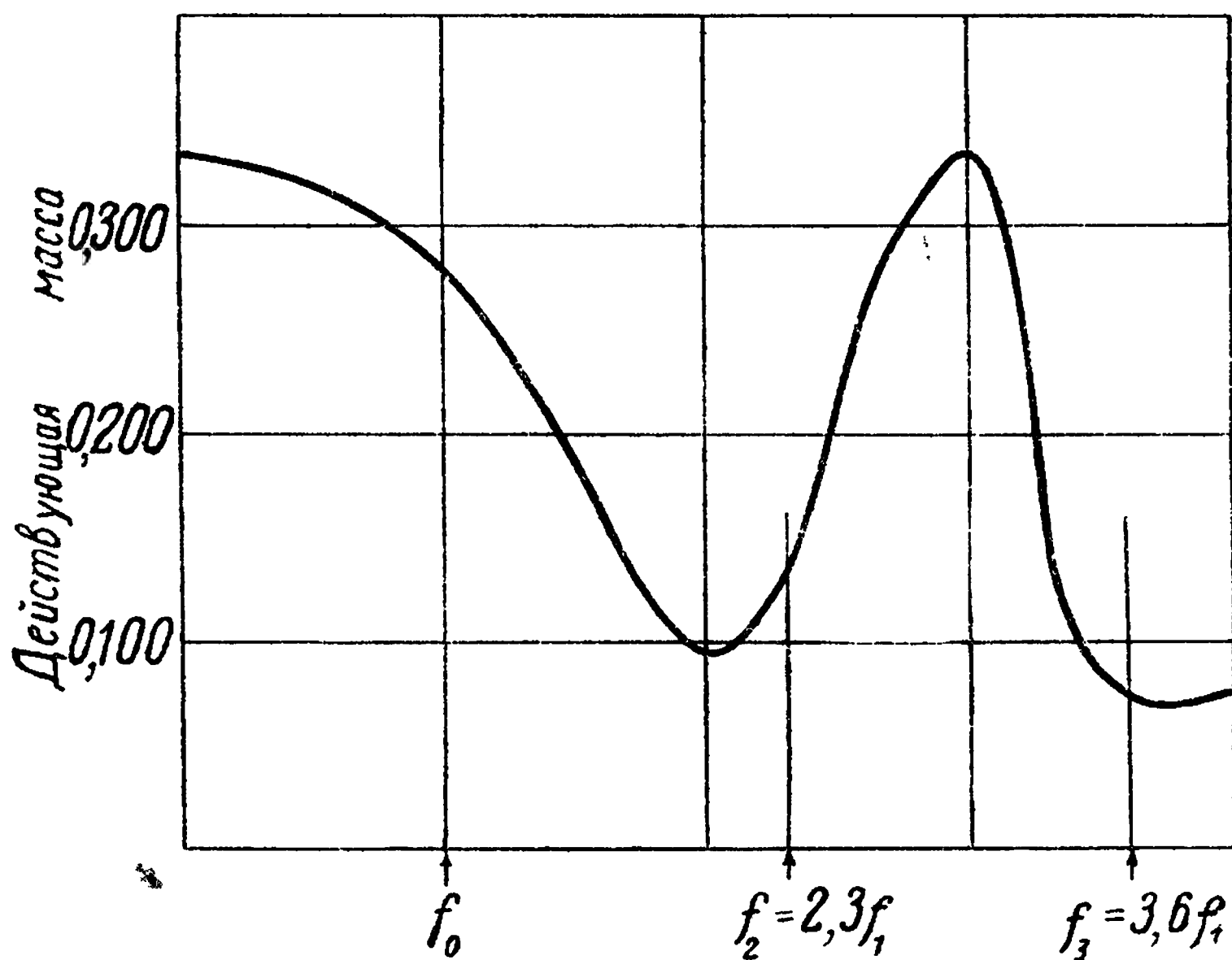


Рис. 3. Действующая масса в долях полной массы для круглой мембраны.

и имеем

$$Z_{r=0} = \frac{\kappa^2 \tau}{-i\omega \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{\kappa^2 a^2}{4}} \right]} = + \frac{1}{i\omega} \left[\frac{4\tau}{a^2} - \tau \kappa^2 \right] = R + i \left[\rho \omega - \frac{4\tau}{a^2 \omega} \right]. \quad (34)$$

Таким образом, полное сопротивление появляется здесь в своей обычной форме и одновременно мы узнаем здесь коэффициент упругости, равный $S_{r=0} = \frac{4\tau}{a^2}$, что согласуется с уравнением (19). Это означает, что если бы можно было заставить колебаться, как поршень, только небольшую часть в центре мембраны при действующих массе и упругости, определяемых из (34), то собственная частота такого поршня была бы равной $\frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$, что не совпадает с собственной частотой всей мембраны при ее основном колебании. Полное сопротивление на единицу поверхности имеет наименьшую величину в центре, возрастая до ∞ при $r = a$; действующая упругость на единицу поверхности возрастает, в то время

как действующая масса на единицу поверхности уменьшается с увеличением r от нуля до a .

Полный анализ всех видов колебаний круглой мембраны имеется в классической литературе. Справки по теории Бесселевых функций читатель может найти в главе XVII сочинения „Современный анализ“ Е. Уайттекера и Г. Ватсона (Кэмбридж, 1920) в дополнение к ранее приведенным ссылкам.

§ 11. Воздушное демпфирование; поршневая система; функции ber и bei .

В случае симметричного колебания мембраны мы заметили, что большая часть в ее центре может рассматриваться как поршень, который при своем движении вперед и назад все время остается перпендикулярным к оси симметрии. Во многих случаях удобно заменять всю активную часть мембраны воображаемым эквивалентным поршнем, причем эта замена законна только для тех частей, при которых все

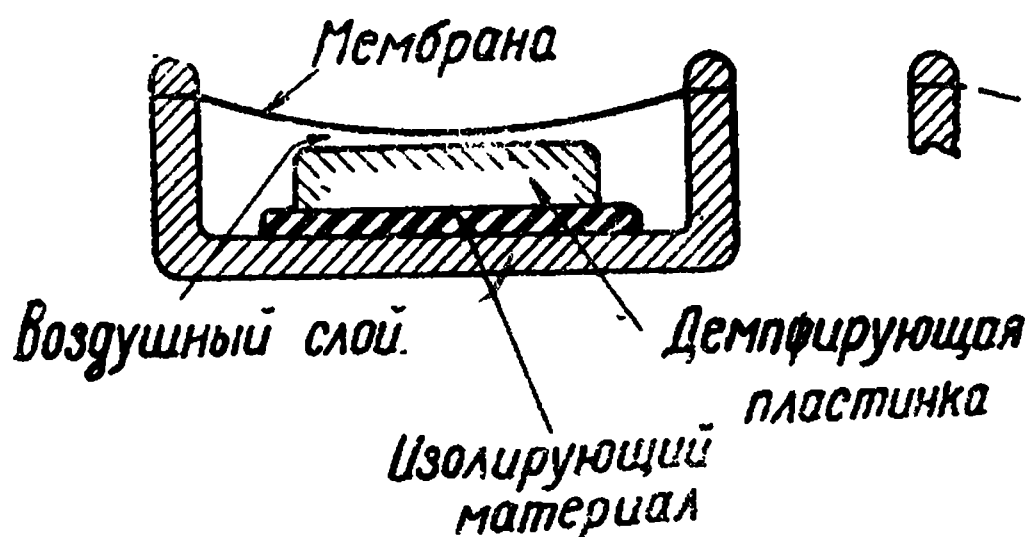


Рис. 4. Разрез конденсаторного микрофона.

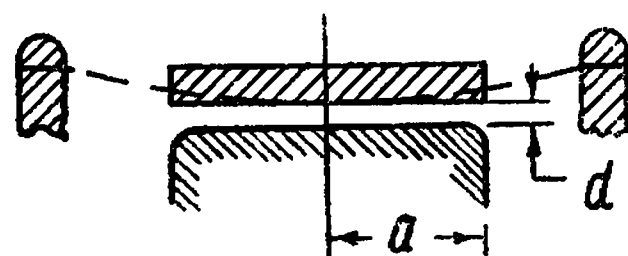


Рис. 4а. Эквивалентная поршневая система.

части мембраны колеблются строго в фазе. Таким образом, в теории низкой частоты мы справедливо заменяли мембрану (§ 9) поршнем, масса которого равнялась одной трети полной массы мембраны и полная действующая упругость которого ($2\pi\tau$) была равна половине действующей упругости в центре мембраны (т. е. $\frac{4\tau}{a^2}$); умноженной на площадь мембраны. Таким образом, поршень некоторой площади с вышеприведенными действующими массой и упругостью, колеблющийся согласно уравнению $\xi = \xi_0 \cos nt$, хорошо представляет движение мембраны при частотах ниже первой собственной частоты. При более высоких частотах такая замена уже не годится. Основания для определения площади эквивалентного поршня излагаются в следующем параграфе.

Рассмотрим теперь задачу об упругости и активном сопротивлении, неравномерно распределенных по поверхности мембраны, вследствие некоторых ограничений: исследование упрощается введением эквивалентного поршня, площадь которого установлена произвольно.

На рис. 4 показано устройство конденсаторного микрофона простейшего вида. Упругость тонкой натянутой мембраны, и так большая (вследствие натяжения), увеличивается еще сжатием воздуха между мембраной и находящейся под ней демпфирующей пластинкой, вследствие чего первая резонансная частота лежит высоко. Поэтому имеется большой рабочий диапазон частот, в котором колебания мембраны близки к основному виду. Вследствие статического заряда системы как конденсатора мембрана притягивается демпфирующей пластинкой и принимает в положении равновесия приблизительно параболоидальную форму; при этом

малые колебания, которые она начинает совершать под воздействием звуковых волн, являются в сущности большим и меньшим отклонением от параболоидальной формы, до тех пор пока частота не выходит за пределы рабочего диапазона. Поэтому представляется целесообразным заменить центральную или активную часть мембраны поршнем (как на рис. 4а), причем вследствие малой кривизны мембраны в этой области поршень может быть взят в виде плоского диска, который в своем среднем положении отделен некоторым расстоянием d от демпфирующей пластинки. Движение поршня вызывает в тонком воздушном слое радиальное смещение воздуха, чему противодействует его вязкость. При малых частотах, когда воздух имеет достаточно времени, чтобы вырываться, получается наибольшая реакция рассеяния или трения и наименьшая эластичность или упругость от накопленного давления на воздушный слой. При высоких частотах положение меняется, воздух мало успевает вырываться и упругая реакция быстро возрастает до наибольшей величины.

Поршню сообщается небольшое смещение $\xi = \xi_0 \cos \omega t$. Предполагая, что температура воздуха остается постоянной (т. е. что воздух остается вместе со своими ограничивающими металлическими поверхностями в тепловом равновесии), имеем, что избыточное давление от простого сжатия равно $p_1 = B \left(\frac{\xi}{d} \right)$, где B — атмосферное давление. Отсюда следует вычесть потерю давления вследствие радиального смещения (η), чтобы получить избыточное давление в любой точке слоя. В кольце, радиусы ограничивающих цилиндров которого равны r и $r + dr$, заключен объем воздуха

$$V_0 = 2\pi d \cdot r dr,$$

а потеря воздуха вследствие радиального смещения равна:

$$dV = \frac{\partial}{\partial r} (2\pi d \cdot r \cdot \eta) dr,$$

поэтому результирующая потеря давления вследствие радиального смещения составляет

$$p_2 = B \frac{dV}{V_0} = \frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\eta) = B \left(\frac{\eta}{r} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \right). \quad (35)$$

Избыточное давление в какой-либо точке слоя равно тогда $p = p_1 - p_2$. Так как $\frac{dp}{dr} \left(= - \frac{dp_2}{dr} \right)$ есть градиент давления, то имеем, по аналогии с законом Ома, для скорости потока

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{dp_2}{dr}, \quad \text{откуда } \eta = \frac{1}{R} \int \frac{dp_2}{dr} dt, \quad (36)$$

где R — коэффициент сопротивления, причем инерцией движущегося воздуха пренебрегаем за малостью η .

В исследованиях, посвященных движению жидкости (Лемб „Гидродинамика“, 4-е изд., стр. 576; также Драйсдель „Механические свойства жидкостей“, стр. 116), доказывается¹⁾, что для жидкости с вязкостью μ ,

¹⁾ Коэффициент сопротивления в этом случае аналогичен коэффициенту Пуазеля для весьма узкой цилиндрической трубы. Вывод последнего приведен в приложении А (уравнение 1), см. также задачу № 26, в конце III главы.

текущей между параллельными стенками; находящимися одна от другой на весьма малом расстоянии d :

$$R = \frac{12\mu}{d^3}. \quad (37)$$

Подставляя в (35) значение μ из (36) и дифференцируя по времени, имеем

$$\frac{R}{B} \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial r} \quad (38)$$

или, так как p_2 должно меняться по закону $e^{i\omega t}$, т. е. $\dot{p}_2 = i\omega p_2$, то:

$$\frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_2}{\partial r} - \frac{i\omega R}{B} p_2 = 0. \quad (38a)$$

Здесь опять мы встретились с уравнением Бесселя, для решения которого требуются Бесселевы функции нулевого порядка. Давление при $r=0$ должно быть конечным, поэтому мы отбрасываем функцию $K_0(kr)$, так как она обращается в бесконечность при $r=0$.

Таким образом

$$p_2 = A J_0(kr) e^{i\omega t}, \text{ где } k^2 = -\frac{i\omega R}{B} \quad (39)$$

и полным решением будет

$$p = p_1 - p_2 = \left[\frac{B}{d} \xi_0 - A J_0(kr) \right] e^{i\omega t}. \quad (40)$$

Чтобы оценить это выражение, исследуем значения $J_0(kr)$ при мнимом $-k^2$. Полагая $\alpha = \sqrt{\frac{\omega R}{B}}$, имеем вместо уравнения (25)

$$J_0(kr) = J_0(\sqrt{-1} \alpha r) = 1 + i \frac{\alpha^2 r^2}{2^2} - \frac{\alpha^4 r^4}{2^2 4^2} - i \frac{\alpha^6 r^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad (41)$$

или

$$J_0(\sqrt{-1} \alpha r) = \text{ber } \alpha r + i \text{bei } \alpha r, \quad (41a)$$

если пользоваться терминологией, установленной электротехниками при решении задачи об активном и реактивном сопротивлении цилиндрического проводника переменному току (см. A. Russel, Phil. Mag., апрель, 1909, стр. 524; или „Переменные токи“, том I, глава VII). Были составлены таблицы для функций ber и bei, вычисленные из рядов:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } \alpha r &= 1 - \frac{\alpha^4 r^4}{2^2 4^2} + \frac{\alpha^8 r^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \dots \\ \text{bei } \alpha r &= \frac{\alpha^2 r^2}{2^2} - \frac{\alpha^6 r^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (41b)$$

Эти функции и соответствующие функции второго рода $\text{ker } \alpha r$ и $\text{kei } \alpha r$ дают ключ к нахождению реакций в цилиндрических телах, когда они подвержены действию периодических движущих сил. Мы начали с предположения, что $\xi = \xi_0 \cos \omega t$. Поэтому следует полагать $p_1 = \frac{B}{d} \xi_0 \cos \omega t$ и сохранить в окончательном решении только вещественные величины. Подставляя вместо A , $C e^{i\varphi}$ и подставляя (41a) в (40), имеем для вещественной части решения

$$p = \frac{B}{d} \xi_0 \cos \omega t - C [\text{ber } \alpha r \cdot \cos(\omega t + \varphi) - \text{bei } \alpha r \cdot \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (42)$$

Для определения C и φ заметим, что для всех значений t , $p = 0$, когда $r = a$ вследствие свободного сообщения с атмосферой.

Тогда, если

$\text{ber } aa = X \cos x$; $\text{bei } aa = X \sin x$; $X^2 = \text{ber}^2 aa + \text{bei}^2 aa$,
получаем

$$\frac{B}{d} \xi_0 \cos \omega t = CX \cos (\omega t + \varphi + x),$$

следовательно:

$$\varphi = -x; \quad \cos \varphi = \frac{1}{X} \text{ber } aa; \quad \sin \varphi = -\frac{1}{X} \text{bei } aa; \quad C = \frac{B\xi_0}{dX},$$

а поэтому окончательное решение будет

$$p = \frac{B\xi_0}{d} \left[1 - \frac{\text{ber } ar \text{ber } aa + \text{bei } ar + \text{bei } aa}{\text{ber}^2 aa + \text{bei}^2 aa} \right] \cos \omega t - \frac{B\xi_0}{d} \left[\frac{\text{ber } ar \text{bei } aa - \text{bei } ar \text{ber } aa}{\text{ber}^2 aa + \text{bei}^2 aa} \right] \sin \omega t. \quad (42a)$$

В этом решении для давления коэффициент амплитуды $\xi_0 \cos \omega t$ представляет упругость на единицу поверхности как функцию от X . Из (41b) $\text{ber}(0) = 1$ и $\text{bei}(0) = 0$; таким образом упругость в центре равна $\frac{B}{d} \left[1 - \frac{\text{ber } aa}{X^2} \right]$ и уменьшается до нуля при $r = a$. Член с синусом совпадает по фазе со скоростью ($\dot{\xi} = -\omega \xi_0 \sin \omega t$), следовательно, активное сопротивление на единицу поверхности в $-\frac{1}{\omega}$ раз больше коэффициента при $\xi_0 \sin \omega t$ в (42a). Поэтому активное сопротивление равно $-\frac{B}{\omega d} \frac{\text{bei } aa}{X^2}$ в центре и также уменьшается до нуля при $r = a$. Таким образом, поршень с неравномерным распределением полного сопротивления по поверхности должен бы рассматриваться как слегка изгибающийся, если строго последовательно продолжить рассуждение. Это уточнение, однако, не вызывается практической необходимостью для данного случая и мы продолжаем исследование, кладя в основу поршневую систему с одной степенью свободы.

На черт. 5 нанесены кривые, грубо выражающие изменения в зависимости от частоты активного сопротивления и упругости на единицу поверхности в центре поршня, а также среднее активное сопротивление и упругость на единицу поверхности; все они вычерчены для поршня и демпфирующего диска радиусом 1,63 см, разделенных слоем воздуха толщиной $2,2 \times 10^3$ см. Из этих кривых можно получить хорошее представление о типичных реакциях простейшей системы с воздушным демпфированием. Данные основаны на старых вычислениях для одной из ранних форм конденсаторного микрофона¹⁾, причем средние значения постоянных были получены путем интегрирования по поверхности поршня.

Изложенная теория была проверена на конденсаторном микрофоне простейшего вида, чем делались некоторые видоизменения в предположениях о форме мембраны; оказалось, что она дает хорошее количественное объяснение работы прибора. Был также проделан интересный специальный

¹⁾ Phys. Rev., XI, 1918, стр. 449. Интегральные значения общей упругости и общего активного сопротивления для всей поверхности поршня суть соответственно

$$S = \frac{\pi a^2 B}{d} \left[1 - \frac{2}{aa} \frac{\text{ber } aa \text{bei}'aa - \text{ber}'aa \text{bei } aa}{\text{ber}^2 aa + \text{bei}^2 aa} \right]$$

и

$$r' = \frac{2\pi a B}{\omega a d} \left[\frac{\text{bei } aa \text{bei}'aa + \text{ber } aa \text{ber}'aa}{\text{ber}^2 aa + \text{bei}^2 aa} \right].$$

опыт для проверки формулы сопротивления при низких частотах: диафрагма конденсаторного микрофона была нагружена в центре тяжелым диском (для уменьшения собственной частоты) и измерялась величина $\Delta = \frac{r_0}{2m}$ по кривой собственных колебаний, записанной электрическим способом. В этом случае (так как $\text{ber}(0)=1$ и $\text{bei}(\alpha r) = \frac{1}{4} \alpha^2 r^2$ при $\alpha r \rightarrow 0$) имеем на единицу поверхности

$$r'_0 = \frac{1}{\omega} \frac{B}{d} \left[\frac{\alpha^2 a^2 - \alpha^2 r^2}{4} \right] = \frac{R}{4d} (a^2 - r^2) \quad (43)$$

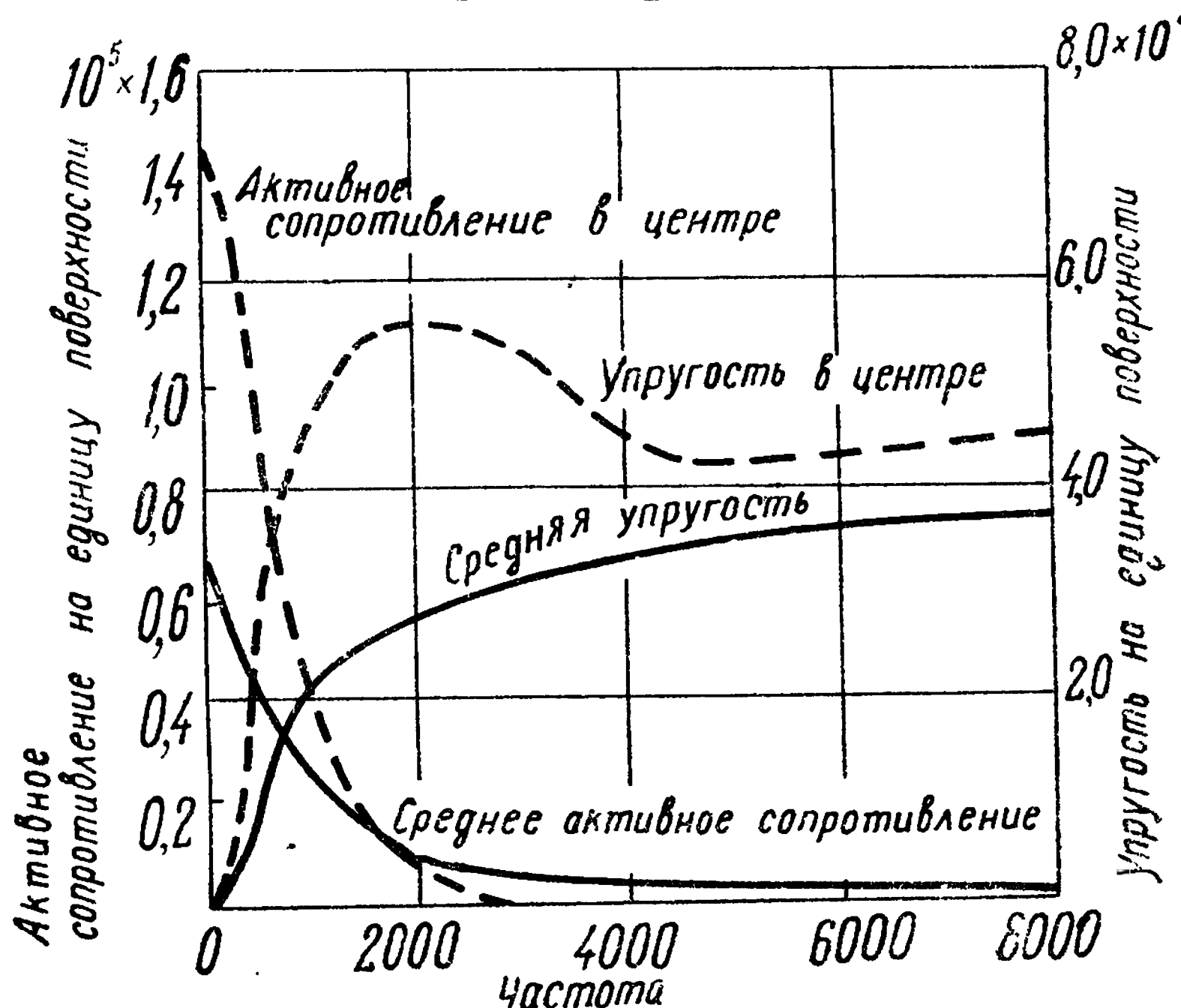


Рис. 5. Реакции в демпфирующем воздушном слое (поршневая система).

и общее сопротивление, так как $R = \frac{12\mu}{d^2}$ из (37) равно:

$$r_0 = 2\pi \int_0^a r'_0 r dr = \frac{3}{2} \frac{\pi \mu a^4}{d^3} \quad (44)$$

или, в среднем, на единицу поверхности:

$$\bar{r}_0 = \frac{3}{2} \frac{\mu a^2}{d^3}. \quad (44a)$$

Это выражение определяет точку при частоте, равной нулю, для среднего активного сопротивления, изображенного на рис. 5.

По вопросам изготовления конденсаторного микрофона читатель может обратиться к последним статьям (Е. С. Wente)¹⁾ в дополнение к ранее указанным источникам. В современной практике имеется тенденция широко

¹⁾ См. также приложение В.

использовать свойства сопротивления воздушного слоя. Здесь была рассмотрена задача в упрощенной форме потому, что прибор представляет собой особый пример применения вязкого демпфирования к колебательной системе.

§ 12. Эквивалентный поршень; средняя скорость; диафрагмы.

Рассмотрим теперь основания и методы определения площади эквивалентного поршня для реальной колебательной системы. Если система излучает энергию в среду (например, в сжимаемую жидкость), то необходимо знать количество жидкости, смещенное в единицу времени, выраженное через движение системы. Эта постоянная, называемая напряженностью источника или потоком источника лучше всего определяется, как произведение некоторой площади на среднюю скорость по этой площади: $A = \bar{\xi} S$. Если A известно, то можно вычислить излучение системы, а следовательно, и ее сопротивление излучения. Величины как $\bar{\xi}$, так и S мы можем в некоторых разумных пределах подбирать таким образом, чтобы их произведение было равно A .

Обычно в практических случаях бывает выгодно задаться площадью так, чтобы можно было легче всего определить условия излучения.

Пусть, например, колеблющаяся диафрагма площади S_1 примкнута к трубе с несколько большей площадью поперечного сечения S_2 . В этом случае целесообразно заменить диафрагму (движение которой в разных точках различно) поршнем площади S_2 , приписав ему среднюю скорость $\bar{v}_2 = \frac{S_1}{S_2} \bar{\xi}_1$, если $\bar{\xi}_1$ представляет среднюю скорость диафрагмы по поверхности S_1 . Определив таким образом площадь эквивалентного поршня, можно присущие системе массу, упругость и активное сопротивление отнести к поршню, так, чтобы наилучшим образом представить устройство системы.

Чтобы в каком-либо конкретном случае определить A , надо вычислить среднюю скорость. Типичный пример нахождения средней скорости рабочей поверхности (упрощенной) телефонной диафрагмы приводится в дальнейшем. Определение формы диска, зажатого по краям и колеблющегося в одном из своих собственных колебаний, представляет сложную задачу, приводящую к дифференциальному уравнению четвертого порядка, и мы укажем здесь только конечный результат. У Рэля доказано (§§ 217—221a), что амплитуда колебаний такого диска равна:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= C [J_0(kr) + \lambda J_0(ikr)] \cos(nt - \varepsilon), \\ \text{где} \quad k^2 &= \frac{n}{h} \sqrt{\frac{3\rho(1-\sigma^2)}{E}} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

($2h$ — толщина; ρ — плотность, E — модуль Юнга, σ — Пуассоновое отношение; $n = 2\pi$, умноженным на какую-либо собственную частоту). На границе ($r = a$) следует соблюсти два условия: именно как ξ , так и $\frac{d\xi}{dr}$ должны обратиться в нуль. Эти два условия определяют λ и k ; тогда (считая λ известным) имеем

$$\xi(kr) = \xi_0 \frac{J_0(kr) + \lambda J_0(ikr)}{1 + \lambda} \cos(nt - \varepsilon). \quad (45a)$$

Для первой собственной частоты $k_1 a = 3,2$; $\lambda_1 = -\frac{J_0(ka)}{J_0(ika)} = 0,056$, причем собственная частота равна (см. уравнение 45):

$$f_1 = \frac{(3,2)^2 \sqrt{E \cdot h}}{2\pi a^2 \sqrt{3\rho(1-\sigma^2)}} = 2,95 \frac{h}{\pi a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}}. \quad (46)$$

(Графики Бесселевых функций даны Кенелли в его „Electrical Vibration Instruments“, стр. 304—305). Средняя скорость, выраженная через максимальную (центральную) скорость, равна:

$$\bar{\xi} = \frac{2\pi}{\pi a^2} \int_0^a \xi(kr) r dr = \frac{2\xi_0}{k^2 a^2} \int_0^{ka=3,2} \frac{J_0(kr) + \lambda J_0(ikr)}{1 + \lambda} kr \cdot k dr. \quad (47)$$

Интеграл легко вычисляется, так как

$$\int_0^b x J_0(x) dx = x J_1(x) \Big|_0^b.$$

Функция $-iJ_1(ix)$, появляющаяся при интегрировании второго члена в числителе, известна как $I_1(x)$ и является вещественной величиной, если x вещественно; имеются таблицы $I_1(x)$.

Вычисление (47) дает

$$\bar{\xi} = 0,306 \xi_0, \quad (48)$$

что и составляет искомую среднюю скорость. Это значение в применении к главной симметричной форме колебаний достаточно точно для многих задач, где рассматривается излучение телефонных диафрагм, при условии, что частота меньше двойной первой собственной частоты и что колебания малы.

Читатель может сравнить интеграл (47) с данным Кенелли (см. выше), в котором квадрат скорости проинтегрирован по поверхности диафрагмы для определения действующей массы. Следует также заметить, что функция

$$\xi = \xi_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \left(\xi_0 = \frac{3}{128} \cdot \frac{(1-\sigma^2)}{E} \frac{Pa^4}{h^3}\right) \quad (49)$$

изображает статическое смещение под равномерной нагрузкой P на единицу поверхности, причем постоянные упругости те же, что и раньше (см. Love, Elasticity, 3-е издание, 1920, стр. 494). Если эту функцию проинтегрировать по поверхности для получения среднего статического смещения, то окажется $\bar{\xi} = \frac{1}{3} \xi_0$ (см. уравнение 20). Таким образом, средняя скорость диафрагмы, выраженная через скорость в центре, изменяется немного в диапазоне частот от нуля до первой собственной частоты. Ввиду некоторых отклонений действительных колеблющихся диафрагм от теоретической формы колебаний, вследствие неполной симметрии движущей силы и т. п., нет смысла с большой точностью определять такие „постоянные“ как средняя амплитуда. Пример был дан лишь для иллюстрации принципа, и попутно выявил некоторые факты, касающиеся колебаний зажатой круглой пластинки. Опытное исследование диафрагм, г. е. изменения их постоянных в зависимости от различного рода усилий, относится к области технических разработок и проектирования и для начала мы им не занимаемся. Задачей настоящей главы было показать, по возможности конкретно, основные свойства простой колебательной

системы, и, если нам это удалось, то отправная точка для дальнейшего изложения достигнута¹⁾. В следующей главе будут рассмотрены общие методы, применяемые при исследовании систем с несколькими степенями свободы. В дальнейших главах мы будем иметь дело с получением и передачей звука.

ЗАДАЧИ.

1. (а) Даны следующие постоянные телефонной диафрагмы (выраженные через движение ее центра) для частот, близких к резонансной:

$$m = 0,675 \text{ г}, \quad s = 2,67 \times 10^7 \text{ дин/см.}$$

$$r = 270 \text{ дин. сек/см.}$$

Определить резонансную частоту f_0 ; коэффициент затухания Δ ; частоту собственных колебаний.

(b) Центру диафрагмы сообщено произвольное смещение в 0,01 см от положения равновесия, после чего она предоставлена самой себе. Написать уравнение движения.

(с) Написать уравнение движения центра диафрагмы при некоторой начальной скорости 60 см/сек., причем колебания начинаются с положения равновесия.

2. (а) Постоянная сила F внезапно прикладывается к простой колебательной системе. Определить нарастание смещения со временем для „периодического“ случая. Найти значение t для первой точки перегиба (или точки нулевого ускорения) кривой нарастания, показать также, что в этой точке

$$qs = r\dot{\xi}, \quad \text{если} \quad q = \frac{F}{s} - \xi.$$

(b) Постоянная сила F внезапно перестает действовать на систему, обладающую критическим затуханием (т. е. аperiodическую). Вывести закон убывания амплитуд, имея в виду, что оба корня вспомогательного уравнения в этом случае равны между собой и решение должно иметь вид:

$$\xi = (A' + B't)e^{-\Delta t},$$

определить A' и B' ; имеется ли точка перегиба на кривой убывания.

3. Сила $\Psi \cos \omega t$ действует на диафрагму. Полагая, что эквивалентная простая система обладает постоянными, приведенными в примере 1, найти средние квадратичные значения амплитуды и скорости при резонансе для $\Psi_0 = 10$ дин. Найти средние квадратичные значения амплитуды и скорости для частот на 30% выше и ниже резонансной; то же для частот $\frac{1}{2\pi}(n \pm \Delta)$, а также для частоты, равной нулю. Представить все эти данные графически для выявления частотной характеристики системы.

4. Рассмотреть аналитически движение центральной точки диафрагмы, когда в условиях установившегося режима движущая сила $\Psi_0 \cos \omega t$ внезапно устраняется.

¹⁾ Некоторые читатели возможно пожелают детальнее познакомиться с такими вопросами, как упругие постоянные твердых тел и с колебаниями пластин и полос. Им следует обратиться к классической теории, напр. к Лембу, гл. IV и V. Мы стараемся избегать, где возможно, повторений материала, уже ранее опубликованного.

5. Полагая скорость $\dot{\xi} = \frac{V_0}{Z} e^{i\omega t}$, согласно теории установившегося режима простой системы, показать, что мгновенное значение теряемой в системе мощности равно $\dot{\xi}^2 r$.

6. Вывести простейшее выражение для энергии, запасенной в простой системе в установившемся режиме. Меняется ли она? Равна ли максимальная кинетическая энергия максимальной потенциальной энергии и когда именно?

7. Вывести уравнение (19).

8. Круглая мембрана из листовой стали диаметром 4 см и толщиной 0,005 см подвергнута некоторому натяжению. Под действием равномерного статического давления в $1/2$ атмосферы, приложенного к одной стороне мембраны, получено центральное отклонение, равное 0,01 см. Каковы первые три собственные частоты для простого симметричного вида колебаний?

9. Поршнеобразная система с воздушным демпфированием образуется поршнем радиуса 1,63 см и массы 42,9 г. Наблюдаемая постоянная затухания была равна $3,4 \times 10^3$ при среднем расстоянии между поршнем и демпфирующей пластинкой в $2,9 \times 10^{-3}$ см. По этим данным требуется определить коэффициент вязкости демпфирующей среды, базируясь на положениях теории низкой частоты.

10. Показать, что при низких частотах действующая масса круглой пластинки, заделанной по краю, выраженная через движение в центре, составляет $1/5$ общей массы свободной части пластинки. Показать также, что соответствующий коэффициент упругости при низких частотах равен:

$$s = \frac{128}{9} \frac{\pi E h^3}{(1-\sigma^2) a^2} \quad (\text{ср. уравнение 49})$$

и, исходя из этого, показать, что первая собственная частота пластинки равна:

$$f_1 = 2,98 \cdot \frac{h}{\pi a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho (1-\sigma^2)}}$$

что хорошо согласуется с полученным более строгим путем результатом формулы (46).

ГЛАВА II.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ; РЕЗОНАТОРЫ И ФИЛЬТРЫ.

§ 20. Обобщенные координаты.

Для системы с несколькими степенями свободы, т. е. системы, для точного описания движения которой необходима более, чем одна независимая переменная ($\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$), обычно невозможно вывести уравнения движения из принципа сохранения энергии, как это было сделано в § 2 для случая системы с одной степенью свободы. Причина этого в том, что принцип сохранения энергии не может учесть обмена энергии между внутренними частями системы, которые не подвергаются непосредственному воздействию внешних сил. Уравнения движения системы должны учитывать не только внешние силы, но и взаимные реакции внутри системы.

Итак, пусть независимые переменные ($\xi_1 \dots \xi_m$) представляют только такие смещения, которые могут иметь место при наличии усилий, суще-

ствующих в системе. Если следовать методу Ньютона, то можно было бы разложить каждую из этих сил на три взаимно перпендикулярных составляющих и тогда, разложив тем же путем приложенные силы, мы получили бы для описания движения три обыкновенных уравнения механики. Если, однако, разложить приложенные усилия так, чтобы рассмотрению подвергались только те составляющие, которые действуют в направлении возможных смещений ξ_j , и если выразить строение системы только через эти смещения ($\xi_1 \dots \xi_m$), а также через действующие массу, упругость и активное сопротивление, которые берутся с учетом внутренних реакций, то, применяя один из общих принципов динамики (напр. д'Аламбера или принцип последствия), можно получить m уравнений, которые полностью выражают движение системы. В наших выкладках мы будем, в частности, придерживаться метода Лагранжа; упрощенные координаты ($\xi_1 \dots \xi_m$) известны под названием обобщенных координат. Силы¹⁾, стремящиеся увеличить эти смещения, называются обобщенными силами; уравнения движения в результате применения этого метода обычно получаются в сжатой и удобной форме.

Трактуемый метод является основным в механике, общеупотребительным и необходимым при рассмотрении явлений, происходящих в колебательных системах. Не имея времени заниматься выводами, мы все же должны ознакомиться с механизмом метода и его основными принципами. Мы будем это делать индуктивным методом, начиная с рассмотрения более легкой задачи с двумя степенями свободы.

§ 21. Система с двумя степенями свободы; о собственных колебаниях вообще.

К тонкой струне длиной $3l$ с натяжением τ прикреплены в двух точках на расстоянии l от каждого конца две одинаковые массы. Эти массы (1) и (2) могут колебаться в вертикальной плоскости; их смещения от положения равновесия соответственно равны ξ_1 и ξ_2 . Трение учтено тем, что введены одинаковые постоянные сопротивления r для каждой степени свободы. Составляющая сила, действующая на любую частицу вследствие натяжения на конце струны, разложенная по направлению движения, равна $\frac{\tau}{l} \xi$. Очевидно, что в системе возможны два вида движения, именно один, когда ξ_1 и ξ_2 имеют одинаковый знак, и другой, когда они имеют противоположный знак. В каждом случае составляющая силы (например) в первой частице, вследствие натяжения в средней части струны и разложенная в направлении ξ_1 , равна $\frac{\tau}{l} (\xi_1 - \xi_2)$.

Полагая $c = \frac{\tau}{l}$, имеем уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 + r\dot{\xi}_1 + 2c\xi_1 - c\xi_2 &= \Psi_1, \\ m\ddot{\xi}_2 + r\dot{\xi}_2 + 2c\xi_2 - c\xi_1 &= \Psi_2, \end{aligned} \quad (51)$$

где Ψ_1, Ψ_2 суть силы, приложенные к частицам (1), (2) в их соответствующих направлениях движения. В задаче наиболее интересным представляется влияние гибкого соединения или „связи“ между двумя колеблющимися массами.

¹⁾ Строго говоря, обобщенная сила Ψ_i , соответствующая каждой обобщенной координате ξ_i , определяется как отношение совершенной работы к перемещению. Когда ξ_i получает бесконечно малое приращение $\delta\xi_i$, остальные координаты при этом остаются неизменными.

Полное решение так же, как и в случае одной степени свободы, должно содержать выражения как для установившегося режима, так и для переходных явлений. Рассматривая сначала эти последние и предполагая решение в форме $\xi = \xi_0 e^{\lambda t}$, имеем, так как $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$, при свободных колебаниях

$$\left. \begin{aligned} \beta \xi_1 - c \xi_2 &= 0, & (\beta = \lambda^2 m + \lambda r + 2c), \\ -c \xi_1 + \beta \xi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

В этих двух уравнениях, для их совместности, необходимо:

$$\left| \begin{array}{cc} \beta & -c \\ -c & \beta \end{array} \right| = 0 \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} (\beta - c)(\beta + c) &= 0, \\ \text{или } \beta_1 &= +c, \quad \beta_2 = -c. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Таким образом, получаем два уравнения для λ , именно:

$$\lambda^2 m + \lambda r + c = 0 \quad \text{и} \quad \lambda^2 m + \lambda r + 3c = 0, \quad (54)$$

решения которых суть:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{r}{2m} \pm i \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = -\Delta \pm i n'_1, \\ \lambda_2 &= -\frac{r}{2m} \pm i \sqrt{\frac{3c}{m} - \frac{r^2}{4m^2}} = -\Delta \pm i n'_2, \end{aligned} \right\} \quad (54a)$$

где $n' = \sqrt{n^2 - \Delta^2}$, как в § 3. Теперь очевидно, что имеются два вида колебаний, являющихся собственными для системы, именно одно с частотой $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$ и другое с частотой $f_2 = \sqrt{3} f_1$. Вследствие симметрии нет оснований связывать одно из этих движений более тесно с частицей (1), чем с частицей (2); поэтому оба вида движения должны одновременно иметь место в обеих степенях свободы. Таким образом для переходных колебаний мы должны иметь (ср. уравнение 6):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A_1 e^{-\Delta t} \sin(n'_1 t + \theta_1) + A_2 e^{-\Delta t} \sin(n'_2 t + \theta_2), \\ \xi_2 &= A'_1 e^{-\Delta t} \sin(n'_1 t + \theta'_1) + A'_2 e^{-\Delta t} \sin(n'_2 t + \theta'_2). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Однако, все 8 постоянных не независимы одна от другой; для общего решения двух совместных уравнений второго порядка требуются только 4 произвольных постоянных. Полагая $\beta_1 = c$, что соответствует колебанию более низкой частоты ($f_1 = \frac{1}{2\pi} n'_1$) (мы должны иметь $\xi_1 = \xi_2$ (уравнение 52) и аналогично, если $\beta_2 = -c$ для другого вида колебаний, то $\xi_1 = -\xi_2$. Единственное решение, согласное с этими условиями, есть:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= [A_1 \sin(n'_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(n'_2 t + \theta_2)] e^{-\Delta t}, \\ \xi_2 &= [A_1 \sin(n'_1 t + \theta_1) - A_2 \sin(n'_2 t + \theta_2)] e^{-\Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (55a)$$

Здесь численное равенство коэффициентов, очевидно, имеется за счет физической симметрии в системе A_1, A_2, θ_1 и θ_2 должны быть выражены через начальные смещения и скорости, приписываемые обоим массам (1) и (2).

Теперь можно сделать следующие важные выводы для этой симметричной системы с двумя степенями свободы: 1) квадраты обеих

собственных частот расположены гармонически по отношению к квадрату собственной частоты каждой частицы, когда другая удерживается в своем положении равновесия и 2) все возможные свободные колебания системы объясняются наложением одного движения, при котором обе частицы находятся строго в фазе, на другое, когда они по фазе прямо-противоположны, в течение всего процесса движения; амплитуды соответствующих переходящих колебаний в обеих степенях свободы численно между собой равны.

Для более общего случая системы с m степенями свободы можно (см. Лемб, стр. 44) сделать следующие выводы:

1. Существуют m собственных частот и, следовательно, m составляющих собственных колебаний, происходящих одновременно во всех частях системы. Это — „нормальные“ колебания системы.

2. m собственным частотам соответствуют m показателей затухания ($\Delta_1 \dots \Delta_m$), причем эти собственные частоты и показатели затухания определяются из характеристического уравнения m -го порядка относительно λ^2 аналогично (53) из предыдущего примера.

3. В каждом из m видов колебания система колеблется в точности так, как будто бы она имела только одну степень свободы, причем координаты ($\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m$) имеют постоянные относительные величины, поскольку речь идет об амплитудах; единственными произвольными постоянными являются шкала амплитуд и фазовые константы.

Общее уравнение, выражающее эти выводы для переходного режима в r -й степени свободы, следующее:

$$\xi_r = \sum_{j=1}^m B_j A_{rj} e^{-\Delta_j t} \sin(n'_j t + \theta_j), \quad (55b)$$

где константы β_j и θ_j произвольны и зависят от начальных скоростей и амплитуд; они могут быть определены из выражений:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\xi_2}{\xi_1} \Big|_{n=n_1} = \frac{A_{21}}{A_{11}}, \quad \frac{\xi_2}{\xi_1} \Big|_{n=n_2} = \frac{A_{22}}{A_{12}} \cdots \frac{\xi_2}{\xi_1} \Big|_{n=n_m} = \frac{A_{2m}}{A_{1m}} \\ \vdots \\ \frac{\xi_m}{\xi_1} \Big|_{n=n_1} = \frac{A_{m1}}{A_{11}} \cdots \frac{\xi_m}{\xi_1} \Big|_{n=n_m} = \frac{A_{mm}}{A_{1m}} \end{array} \right] \quad (56)$$

Можно положить $A_{11} = A_{12} \dots A_{1m}$ равным единице. Например, в (55а) имеем

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2, \quad A_{11} = A_{12} = 1; \quad A_{21} = 1; \quad A_{22} = -1.$$

§ 22. Теория установившегося режима для двух степеней свободы и в общем случае.

Чтобы определить поведение системы при установившемся режиме и, таким образом, дополнить решение, мы примем, что одна частица находится под воздействием движущей силы $\Psi_1 = \Psi_0 e^{i\omega t}$ (уравнение 51) и упростим рассмотрение, полагая $\Psi_2 = 0$. Вследствие симметрии существенных погрешностей это не внесет. Тогда для движения вида $\xi_1 = \xi_{01} e^{i\omega t}$, $\xi_2 = \xi_{02} e^{i\omega t}$ имеем

$$\left. \begin{aligned} (-m\omega^2 + ir\omega + 2c)\xi_1 - c\xi_2 &= \Psi_0 e^{i\omega t}, \\ -c\xi_1 + (-m\omega^2 + ir\omega + 2c)\xi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Форма этих уравнений дает возможность упростить их, если ввести полное сопротивление и скорость аналогично динамической теории электрических цепей. Выражения (57) эквивалентны:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \dot{\xi}_1 - \frac{c}{i\omega} \dot{\xi}_2 &= \Psi_0 e^{i\omega t}, \\ -\frac{c}{i\omega} \dot{\xi}_1 + \alpha \dot{\xi}_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (57a)$$

если

$$\alpha = r + i \left(m\omega - \frac{2c}{\omega} \right).$$

Решая их относительно скоростей, имеем:

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\alpha \Psi_0 e^{i\omega t}}{\left(\alpha - \frac{c}{i\omega} \right) \left(\alpha + \frac{c}{i\omega} \right)} \quad \text{и} \quad \dot{\xi}_2 = \frac{\frac{c}{i\omega} \Psi_0 e^{i\omega t}}{\left(\alpha - \frac{c}{i\omega} \right) \left(\alpha + \frac{c}{i\omega} \right)} \quad (58)$$

или, полагая

$$\left(\alpha - \frac{c}{i\omega} \right) = \alpha_1 = r + i \left(m\omega - \frac{c}{\omega} \right) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = r + i \left(m\omega - \frac{3c}{\omega} \right),$$

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\alpha}{\alpha_1 + \alpha_2} \Psi_0 e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad \dot{\xi}_2 = \frac{c}{i\omega} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \Psi_0 e^{i\omega t}. \quad (58a)$$

Эти уравнения могут быть рационализированы и детально изучены для случая реально приложенной силы $\Psi_0 \cos \omega t$, действующей на частицу (1). Практически, ввиду того, что сходное исследование было сделано в § 7 для простой системы, эта кропотливая работа не является необходимой для понимания поведения системы. Прежде всего заметим величины размерности сопротивлений и дадим им специальные обозначения:

$$Z_{11} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha} = \frac{D}{\alpha}; \quad Z_{12} = \frac{i\omega}{c} \alpha_1 \alpha_2 = \frac{i\omega}{c} D. \quad (59)$$

Первая из них может быть названа сопротивлением в точке возбуждения („driving-point“ impedance) или кажущимся сопротивлением в точке приложения силы; второй — приведенным сопротивлением (transfer impedance) или кажущимся сопротивлением в точке (2) для силы, приложенной в точке (1). Как Z_{11} , так и Z_{12} имеют минимум при обеих собственных частотах (ср. β_1, β_2), найденных в устанавливающемся решении § 2; при этих частотах возникают весьма сильные вынужденные колебания. При промежуточной частоте, для которой $\beta = 0$, $\alpha = r$, Z_{11} получает максимум, и частица (1) колеблется с малой амплитудой; однако, частица (2) при этой частоте имеет амплитуду большую в отношении $\frac{c}{i\omega r}$. c может рассматриваться как коэффициент связи, увеличивающийся с увеличением натяжения струны или с уменьшением расстояния l между частицами. Так, для диапазона частот между $f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{m}}$ и $f_2 = \sqrt{3} f_1$ прибор, приводимый в движение в точке (1), если наблюдать амплитуду и скорость в точке (2), ведет себя подобно грубому фильтру, у которого крутизна спада амплитуд при $f < f_1$ и $f > f_2$, а также высота минимальной амплитуды между f_1 и f_2 возрастает с уменьшением активного сопротивления r ; далее промежуточный минимум амплитуды возрастает с увеличением коэффициента связи c .

Общие свойства аналогичной электрической системы, состоящей из двух идентичных контуров, связанных емкостью, настолько хорошо известны, что мы на этом останавливаться не будем.

Теперь сделаем некоторые общие заключения относительно поведения системы с m степенями свободы при установившемся режиме:

1. Когда на какую-либо часть системы действует периодическая сила вида $\Psi_j \cos \omega t$, то любая часть системы следует колебанию с тем же периодом, причем скорости и амплитуды колебания заданы уравнениями вида (58a). В таких уравнениях всегда в числителе правой части появляется определитель $D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m)$, который, будучи приравнен нулю [$D(\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m)$ (уравнение 53)], определяет собственные частоты и показатели затухания системы. Так, наибольшие вынужденные колебания получаются при тех значениях β_j , которые дают минимальные значения $D(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m)$.

2. Относительные фазы и амплитуды колебаний разных частей системы меняются с изменением частоты. Однако, если бы в системе не было расхода энергии, то колебания все находились бы между собой в постоянных фазовых соотношениях. [Заметим: $\frac{\dot{\xi}_1}{\dot{\xi}_2} = \frac{a}{c} i\omega$ (58a)].

3. Вообще в системе с m степенями свободы для единственной силы Ψ_j , приложенной к j -той степени свободы:

$$\dot{\xi}_k = \frac{M_k}{D} \Psi_j \text{ и } \xi_k = \frac{M_k}{i\omega D} \Psi_j, \quad (60)$$

где $D = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ является определителем коэффициентов в общих уравнениях, соответствующих совокупности (57), а M_k есть минор от D , полученный зачеркиванием k -го столбца и j -той строки D и умножением на $(-1)^{j+k}$.

4. Полное решение задачи получается путем сочетания уравнений типа (60) с соответствующими уравнениями типа (55b) и путем определения из начальных условий $2m$ произвольных постоянных.

Читатель, вдумчиво относящийся к вопросу, несомненно поймет, что, поскольку определитель D играет важную роль в аналитическом исследовании задачи как при переходном, так и при установившемся режиме, то постоянно должен существовать ключ для непосредственного получения уравнений (60) по известным уравнениям (55b) и обратно. Это, конечно, правильно: так должно быть для перевода внутренних физических соотношений между явлениями установившегося и переходного режима в данной системе на язык математических терминов.

Последнее было осуществлено Хэвисайдом и его идея была развита позднейшими исследователями теории колебаний. Интересующиеся могут обратиться к статьям Кэрсона (J. R. Carson, Phys. Rev., IX, 1917, стр. 217 и серии статей о „теории электрической цепи“ (Bell Syst. Tech. Jour., 1915—1926) и к статьям Фрая (T. C. Fry, Phys. Rev., XIV, 1919, стр. 117), где дано аналитическое исследование, которое слишком специально для включения в настоящую книгу.

Принимая во внимание изложенное выше обычно для понимания механизма какой-либо заданной системы, бывает достаточно рассмотреть только устанавливающийся (переходный) режим.

§ 23. Метод Лагранжа и уравнения движения.

Продолжая общую теорию, рассмотрим сначала потенциальную энергию V . Обычно в задачах механики принято вводить в рассмотрение такие силы, которые зависят только от положения тела, путем дифференциро-

вания некоторой функции потенциальной энергии (если она существует), по координате в направлении движения. Предположим, что для сил, возникающих от упругих реакций, в уравнении (51) имеет место:

$$\left. \begin{aligned} -Q_1 &= \frac{\partial V}{\partial \xi_1} = 2c\xi_1 - c\xi_2, \\ -Q_2 &= \frac{\partial V}{\partial \xi_2} = 2c\xi_2 - c\xi_1. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Интегрируя (61), имеем

$$V = c\xi_1^2 - c\xi_1\xi_2 + \varphi_2(\xi_2)$$

или по аналогии

$$V = \varphi_1(\xi_1) - c\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2.$$

Так как для совместности уравнений должно иметь место

$$\varphi_1(\xi_1) = c\xi_1^2 \quad \text{и} \quad \varphi_2(\xi_2) = c\xi_2^2,$$

то для данной частной задачи должна существовать потенциальная функция

$$V = c(\xi_1^2 - \xi_1\xi_2 + \xi_2^2). \quad (61a)$$

Все коэффициенты правой части численно равны c вследствие одинаковых расстояний между массами, составляющими нагрузку струны. Теперь рассмотрим кинетическую энергию. При равных массах можно писать сразу

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2), \quad (62)$$

поскольку отсутствуют взаимные реакции вследствие инерции. Это обычно в чисто механических задачах справедливо. В динамической теории электрических цепей встречается взаимная инерция (взаимоиндукция), связь между различными степенями свободы наиболее часто таким путем и осуществляется.

Преимущество исследования квадратичного выражения для кинетической энергии и получения меры изменения количества движения в какой-либо части системы путем последовательного дифференцирования этой функции очевидно. В общем случае однородная квадратичная функция скоростей содержит член с произведением вида $m_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j$, учитывающий реакции взаимной инерции, и для силы инерции любой степени свободы системы имеем

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} \right). \quad (63)$$

Для учета сил трения или, более точно, энергии, затраченной на трение, Рэлей ввел другую однородную квадратичную функцию скоростей, у которой коэффициентами являются постоянные сопротивления. Эта функция, будучи продифференцирована по какой-либо данной скорости, дает силу трения, на преодоление которой во время движения затрачивается работа в данной степени свободы. Эта функция, называемая «функцией рассеяния», пишется для рассмотренного нами простого случая:

$$F = \frac{1}{2} r (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2). \quad (64)$$

Вообще она содержит члены с перекрестным произведением, правда не в тех задачах, с которыми нам придется встретиться. Функция F равна половине от всего расхода энергии в системе как в целом.

Согласно методу Лагранжа (удачно изложенному Рэлеем, I и IV, §§ 80—90) уравнения движения в функции T , V и F суть

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1} \right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}_1} + \frac{\partial V}{\partial \xi_1} = 0, \quad (65)$$

и такие же для других координат. Очевидно, что если T , V и F известны (уравнения 61а, 62, 64), то, применяя (65), можно сразу получить ранее приведенные уравнения движения (уравнение 5).

В классическом виде эти три квадратичных функции пишутся:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11}\dot{\xi}_1^2 + a_{22}\dot{\xi}_2^2 + \dots + a_{12}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 + \dots), \\ F &= \frac{1}{2} (b_{11}\dot{\xi}_1^2 + b_{22}\dot{\xi}_2^2 + \dots + b_{12}\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2 + \dots), \\ V &= \frac{1}{2} (c_{11}\xi_1^2 + c_{22}\xi_2^2 + \dots + c_{12}\xi_1\xi_2 + \dots), \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

где коэффициенты a_{jk} , b_{jk} , c_{jk} суть соответственно постоянные массы, сопротивления и упругости. Для постоянных, указывающих на связь, $a_{jk} = a_{kj}$ и т. д. С алгебраической точки зрения обычно можно выбрать координаты так, что $a_{jk} = b_{jk} = c_{jk} = 0$ и, таким образом, избежать членов с перекрестным произведением; тогда эти новые координаты¹⁾ $\xi'_1, \dots, \xi'_m$ становятся „нормальными“ координатами.

Эти последние обладают интересными свойствами; именно, тогда m уравнений движения содержат каждое только по одной переменной ξ'_i , так как взаимные реакции между разными степенями свободы устраняются. Одной из причин, оправдывающей название „нормальных“ координат, служит то, что, при замене какой-либо связанной системы эквивалентной нормальной системой, собственные колебания, которые происходят раздельно в разных степенях свободы нормальной системы, обладают теми же частотами, как и собственные или нормальные колебания, возникающие одновременно во всех степенях свободы первоначальной системы. Эта идея представляет математический интерес и имеет иногда практическое применение, что будет видно из дальнейшего изложения. Попутно отметим, что при изучении нормальных форм круглой мембраны (§ 10) уже была заложена идея нормальных координат; для каждого вида движения какой-либо части мембраны была применена одна такая координата.

§ 24. Резонаторы.

Имея в виду потребности следующего параграфа, сделаем небольшое отступление и рассмотрим резонаторы.

В акустике термин резонатор обозначает простую колебательную систему, состоящую из сжимаемой жидкости в сосуде, который сообщается с наружным пространством посредством отверстия ограниченного размера в одной из стенок. Типичные примеры изображены на рис. 6 и 6а. В каждом случае упругость системы обусловлена объемным сжатием — $\frac{dV}{V_0}$ внутри сосуда, причем колеблющейся массой является среднее

¹⁾ О практических деталях преобразования см. Whittaker, Dynamics, § 94, а также Rayleigh, §§ 96—100.

количество жидкости, которое колеблется туда и обратно вблизи отверстия.

Теория резонаторов была детально разработана Гельмгольцем (который их изобрел) и Рэлеем; здесь мы разовьем лишь упрощенное исследование.

Рассмотрим сначала случай „бутыли“ (рис. 6). Если ξ представляет малое смещение воздушной „пробки“ в горле бутылки, то сила, действующая на площадь поперечного сечения горла:

$$Q = -\gamma p_0 \frac{dV}{V_0} S = -\gamma p_0 \frac{S_2}{V_0} \xi = -\frac{\rho c^2 S^2}{V_0} \xi, \quad (67)$$

где $-\gamma p_0 \frac{dV}{V_0}$ есть приращение давления воздуха, бывшего в начале равным p_0 , вследствие адиабатического сжатия $-\frac{dV}{V_0}$; позаимствуем из § 30 следующей главы полезное соотношение:

$$\gamma p_0 = \rho c^2 (x)' \text{ из (105a) и (108),}$$

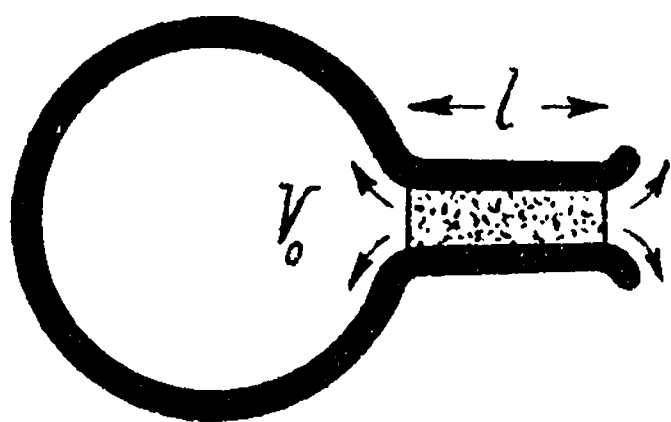


Рис. 6.

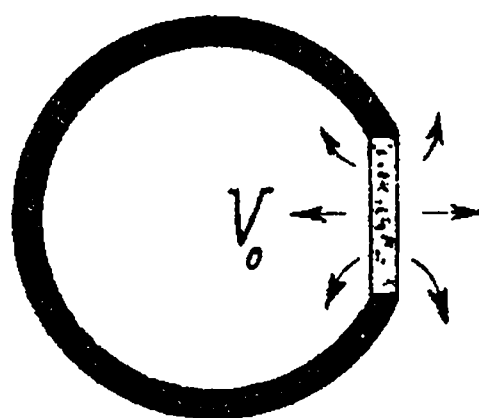


Рис. 6а.

Резонаторы.

где ρ — плотность и c — скорость звука. Масса почти цилиндрической пробки движущегося воздуха равна $\rho S l$, если l — длина горлышка. Таким образом, имеем для действующих массы и упругости

$$a_1 = \rho S l; \quad c_1 = \frac{\rho c^2 S^2}{V_0}, \quad (68)$$

причем уравнение движения: $a_1 \ddot{\xi} + c_1 \xi = 0$; отсюда для собственной частоты

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c_1}{a_1}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{l \cdot V_0}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{V_0}} \quad (69)$$

(величина $K = \frac{S}{l}$ называется „проводимостью“ горлышка в соответствии с ее размерностью).

Собственная частота какого-либо простого резонатора лучше всего определяется „проводимостью“ его отверстия, его объемом и постоянной c , зависящей от среды, в которой находится резонатор.

В случае резонатора (рис. 6а) без горлышка получается неравномерное распределение скорости жидкости в различных точках отверстия; эффективная масса движущегося воздуха в круглом отверстии в тонкой стенке была определена как $\frac{\rho S^2}{K}$, причем K равно диаметру отверстия (Лемб, §§ 82, 86; Рэлей, Vol. II, § 306). Теперь представим себе поршень площади S со средней амплитудой движения ξ (где c_1 неизменно); тогда, как и раньше, получаем уравнение (69) для собственной частоты.

Представление о проводимости, помимо того, что ведет к простой формуле для собственной частоты, облегчает определение полной про-

проводимости в случае, когда две или более проводимости соединены последовательно или параллельно; формулы идентичны с теми, помощью которых вычисляют электрические проводимости. Предположим, например, что требуется „исправить“ формулу проводимости для короткого горлышка, чтобы учесть расхождение (divergence) воздушного потока в конце горлышка: это эквивалентно прибавлению к обратной величине проводимости горлышка обратной величины проводимости концевых отверстий, для которых действительна, как было указано выше, формула $K = 2r$.

В этом случае имеем:

$$K_1 = \frac{S}{l} = \frac{\pi r^2}{l}, \quad K_2 = 2r,$$

$$K = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} = \frac{K_1}{1 + \frac{K_1}{K_2}} = \frac{\frac{\pi r^2}{l}}{1 + \frac{\pi r}{2l}}. \quad (69a)$$

Этим результатом воспользуемся в задачах об акустических фильтрах. До сих пор не учитывалось влияние рассеяния энергии на поведение резонатора. Рассеяние вследствие излучения обычно имеет гораздо большее значение, чем рассеяние от трения в горлышке резонатора, если резонатор расположен так, что может излучать (например, в системе связанных фильтров он для излучения не предназначен).

В предыдущем изложении подразумевалось, что размеры резонатора малы по сравнению с длиной волны, поэтому имеет смысл сделать то же допущение и в отношении отверстия. Пользуясь опять результатами, которые мы получим позднее, имеем при излучении

$$b_1 = \frac{\rho \omega^2 S^2}{4\pi c} = \frac{c \rho K S^2}{4\pi V_0} \quad (175)$$

и так как

$$a_1 = \frac{\rho S^2}{K}, \quad \Delta_1 = \frac{b_1}{2a_1} = \frac{cK^2}{8\pi V_0} \quad (69b)$$

Написанные здесь выражения для b_1 и Δ_1 вскрывают их зависимость от размеров резонатора. Вывод формул для b_1 и a_1 будет дан в главах III и IV. Сейчас же читатель может только проверить правильность их размерности.

В заключение необходимо рассмотреть вязкое демпфирование, хотя оно имеет серьезное значение лишь для случая резонаторов с малыми отверстиями или длинными горлышками. Масса движущегося воздуха в последнем случае равна $\rho l S$. Чтобы найти сопротивление трения, воспользуемся соотношением, выведенным в приложении А, которое вводит коэффициент Гельмгольца для сопротивления колебаниям вязкой жидкости в трубе:

$$-\delta p = p_x - p_{x+l} = -Rl \dot{\xi}; \quad R = \frac{1}{r} \sqrt{2\rho\mu\omega}; \quad (69c)$$

$\frac{\delta p}{l}$ есть градиент давления, r — радиус трубы и μ — коэффициент вязкости. Для трубы с поперечным сечением S имеем силу трения, равную:

$$-S\delta p = RlS \dot{\xi},$$

поэтому

$$b_2 = RlS, \quad (69d)$$

и для составляющей демпфирования вследствие вязкости имеем

$$\Delta_2 = \frac{b_2}{2a_1} = \frac{RlS}{2\rho lS} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\rho}}. \quad (69e)$$

Следует заметить, что в смысле размерности r в этой формуле просто оттеняет другие линейные размеры в определении μ и ρ ; коэффициент демпфирования трением не зависит от площади, кроме случая, когда чрезмерное уменьшение $S = \pi r^2$ повышает трение в согласии с коэффициентом Гельмгольца. Так, величина Δ_2 для n одинаковых горлышек резонатора, если движения все в фазе, будет равна ее величине для одного горлышка; однако, рассеянная энергия ($b_2 \dot{\xi}^2$) будет, конечно, пропорциональна n . В этом заключается способ изменения собственной частоты резонатора без изменения его затухания, если это последнее происходит исключительно от трения в горлышке; именно, частота будет повышаться с увеличением S или с увеличением числа взятых отверстий.

Задачей резонатора является выделение и усиление составляющей звука заданной частоты тем же путем, каким переменный ток выделяется и усиливается настройкой электрического контура (классический пример этого явления дан в труде Гельмгольца об анализе гласных звуков, но имеются важные современные применения резонаторов, о чем будет упомянуто в приложении В). Для иллюстрации покажем, каким образом скорость частиц и избыточное давление звуковой волны усиливаются, когда резонатор настроен на частоту приходящей волны. Как и раньше, позаимствуем из главы III одно необходимое нам соотношение механики; там показано, что для плоских волн (§ 3)

$$\delta p = \rho c \cdot \dot{\xi}_1, \quad (117a)$$

где δp есть избыточное давление, $\dot{\xi}_1$ — скорость частиц и ρc — сопротивление излучения среды. Движущая сила у устья резонатора равна (в первом приближении) $S \delta p e^{i\omega t}$, следовательно, скорость в горлышке резонатора при резонансе равна $S \frac{\delta p e^{i\omega t}}{b_1}$ и если отверстие не настолько сужено, что начинает играть роль вязкость, то сопротивление обязано своим существованием только излучению. Пользуясь уравнениями (69), (175) и (117a), имеем для скорости у отверстия

$$\dot{\xi} = \frac{S \delta p}{b_1} e^{i\omega t} = -\frac{4\pi V_0}{KS} \dot{\xi}_1 e^{i\omega t} = \frac{4\pi c^2}{\omega^2 S} \dot{\xi}_1 e^{i\omega t}, \quad (69f)$$

где $\dot{\xi}_1$ есть максимальная скорость частиц в звуковой волне. Величина $\frac{4\pi c^2}{\omega^2 S} = \frac{\lambda^2}{\pi S}$ вследствие того, что она представляет отношение $\frac{\dot{\xi}_{\max}}{\dot{\xi}_1}$, может быть названа коэффициентом усиления скорости резонатора и, если бы мы вставили в отверстие прибор для измерения скоростей (например тепловой микрофон), мы обнаружили именно такое приращение при применении резонатора для усиления первоначальной скорости частиц волны. Для иллюстрации представим себе, что резонатор настроен на 1000 герц и имеет площадь отверстия $S = \frac{\pi}{4}$ кв. см (как в задаче § 25). Тогда, так как $\frac{c}{\omega} = 5.3$, имеем коэффициент усиления скорости, равный 450, что, очевидно, представляет существенную выгоду. Заметим, что так как усиление скорости меняется обратно пропорционально площади отверстия, а малые отверстия обычно вносят потери

вследствие вязкости, не следует рассчитывать на получение на практике того большого усиления, на которое указывает упрощенная теория.

Следуя Гельмгольцу, многие применяли резонатор с небольшой трубкой, ведущей от задней стенки резонатора к уху, так что изменения давления внутри резонатора действуют с небольшими потерями непосредственно на ухо. Отсюда понятие об „усилении давления“, которое определяется как отношение максимального давления внутри резонатора к максимальному давлению приходящей звуковой волны. Так как избыточное давление в резонаторе равно, согласно (67), $\frac{Q}{\rho}$, то имеем

$$\delta p_r \Big|_{\max} = \frac{Q}{S} \Big|_{\max} = \frac{\rho c^2 S}{V_0 \omega} \xi \Big|_{\max} = \frac{4\pi c^3}{V_0 \omega^3} \rho c \dot{\xi} = -\frac{4\pi c}{\omega K} \delta p, \quad (69g)$$

выражая $\dot{\xi}$ через ξ из (69f). Величина $\frac{4\pi c}{\omega K}$ и есть коэффициент усиления давления резонатора. Обычно он меньше, чем коэффициент усиления скорости, а именно эти величины находятся в отношении:

$$\frac{\text{усиление давления}}{\text{усиление скорости}} = \frac{\omega}{c} \frac{S}{K} \frac{2\pi S}{\lambda K},$$

где λ —длина звуковой волны. Во взятом нами примере (так как $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{5.3}$ (при 1000 герц) и $\frac{S}{K} = \frac{\pi}{4}$) усиление давления составляет 0,15 усиления скорости; однако, очевидно, что при усилении звука резонатор выгоден, так как действует непосредственно на ухо.

Проблема усиления звука для резонатора с двумя степенями свободы ставится перед читателем в конце настоящей главы. Некоторые дальнейшие соображения о поведении резонатора в поле звуковых волн будут даны в § 47 главы IV.

Следует отметить, что элементарная теория этого параграфа относится только к главному виду колебаний обычного резонатора. При колебаниях высшего порядка движения внутри резонатора не находятся все в фазе, и внутри его объема устанавливаются различные комбинации узлов и пучностей. Они зависят от формы резонатора так же, как и частота; вычисления становятся гораздо более сложны, но, кроме случая органнх труб, колебания высшего порядка имеют очень малое практическое значение. Теория органнх труб будет изложена после рассмотрения некоторых других вопросов.

§ 25. Резонатор, связанный с диафрагмой.

Теперь рассмотрим задачу в двух степенях свободы, причем одним из элементов является резонатор. Система схематически изображена на рис. 7; одну стенку цилиндрического сосуда образует телефонная диафрагма, т. е. зажатая круглая пластинка. Попробуем определить результат связи резонатора с диафрагмой; для большей наглядности задачи возьмем такой резонатор, у которого собственная частота как простой системы равна собственной частоте отдельно взятой диафрагмы.

Диафрагма имеет следующие постоянные: действующая масса, выраженная через скорость в центре $a_1 = 0,50$ г, площадь $= 15$ см² = площади цилиндрической части; средняя амплитуда $= 0,30$ от амплитуды в центре (§ 12); $f_0 = 1000$, откуда c_1 (центральный коэффициент упругости) $= 1,97 \times 10^7$ CGS; активное сопротивление (центральное) $b_1 = 200$ CGS.

Длина цилиндра резонатора $L = 1,86$ см; следовательно, объем равен $V_0 = 27,9$ см³, что при диаметре входного отверстия $K = 1$ см дает $f_0 = 1000$, так как $c = 3,32 \times 10^4$ см/сек. Тогда постоянные резонатора будут, если $K = 1,0$:

$$\begin{aligned} a_2 &= \rho S^2 \quad (= 8 \times 10^{-4}), \\ b_2 &= \frac{\rho c S^2}{4\pi V_0} \quad (= 7,6 \times 10^{-2}), \\ c_2 &= \frac{\rho c^2 S^2}{V_0} \quad (= 3,16 \times 10^{-4}), \end{aligned}$$

где S — площадь эквивалентного поршня, или, приближенно, площадь отверстия $\frac{\pi}{4}$.

Чтобы теперь к диафрагме применить теорию эквивалентного поршня, положим $A' = 15$ см² (площадь диафрагмы) и $A = (0,3 \times 15) = 4,5$ см².

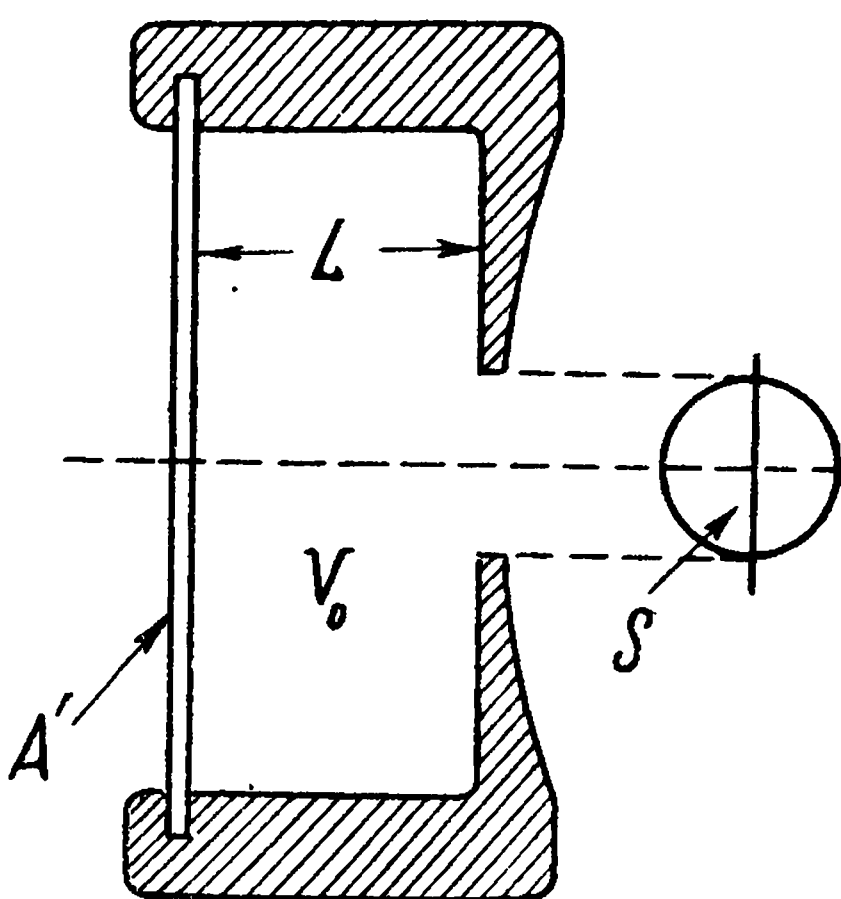


Рис. 7. Диафрагма, связанная с резонатором.

Далее, пусть ξ_1 представляет движение в центре диафрагмы и ξ_2 — движение в отверстии (поршень); тогда для избыточного давления в цилиндре имеем

$$p = \rho c^2 \frac{dV}{V_0} = \frac{\rho c^2}{V_0} (A\xi_1 - S\xi_2).$$

Выражение в скобках есть площадь эквивалентного поршня, умноженная на величину некоторой амплитуды, скажем, $\bar{A} \cdot \bar{\xi}$. Считая это выражение за „нормальную координату“, для данного момента получаем для потенциальной энергии сжатия

$$V = \int_0^{\bar{\xi}} p \cdot d(\bar{A}\bar{\xi}) = \frac{\rho c^2}{V_0} \int_0^{\bar{\xi}} (A\xi_1 - S\xi_2) d(A\xi_1 - S\xi_2) = \frac{\rho c^2}{2V_0} (A\xi_1 - S\xi_2)^2.$$

Прибавляя сюда потенциальную энергию самой диафрагмы, получаем для полной потенциальной энергии системы

$$V = \frac{1}{2} \left[c_1 \xi_1^2 + \frac{\rho c^2}{V_0} (A^2 \xi_1^2 - 2AS\xi_1 \xi_2 + S^2 \xi_2^2) \right]$$

или, вводя новый ряд сокращенных обозначений, а именно:

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_1 + k^2 c_2 \\ c_{12} &= k c_2, \\ c_{22} &= c_2, \end{aligned}$$

где $k = \frac{A}{S} = 5,74$, имеем

$$V = \frac{1}{2} (c_{11} \xi_1^2 - 2c_{12} \xi_1 \xi_2 + c_{22} \xi_2^2). \quad (70)$$

Функции кинетической энергии и потерь рассеяния суть:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_1 \dot{\xi}_1^2 + a_2 \dot{\xi}_2^2), \\ F &= \frac{1}{2} (b_1 \xi_1^2 + b_2 \xi_2^2). \end{aligned} \quad (70a)$$

T , V и F приведены теперь к виду (66), и, применяя метод Лагранжа, полагая приложенные силы равными нулю, имеем следующие уравнения движения для собственных колебаний:

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{\xi}_1 + b_1 \dot{\xi}_1 + c_{11} \xi_1 - c_{12} \xi_2 &= 0, \\ a_2 \ddot{\xi}_2 + b_2 \dot{\xi}_2 + c_{12} \xi_1 - c_{22} \xi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Следуя обычному методу (§ 21 уравнение (52) пишем характеристическое уравнение относительно λ в форме:

$$\begin{aligned} D(\beta) &= \beta_1 \beta_2 - c_{12}^2 = 0, \\ \beta_1 &= \lambda^2 a_1 + \lambda b_1 + c_{11}, \\ \beta_2 &= \lambda^2 a_2 + \lambda b_2 + c_{22}. \end{aligned} \quad (72)$$

Это дает для λ следующее уравнение:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \lambda^4 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) \lambda^3 + (b_1 b_2 + c_{11} a_2 + c_{22} a_1) \lambda^2 + \\ + (b_1 c_{22} + b_2 c_{11}) \lambda + (c_{11} c_{22} - c_{12}^2) = 0 \end{aligned} \quad (72a)$$

Хотя мы и произвели здесь тщательно разворачивание этого уравнения, однако, очевидно, что вследствие существенной асимметрии между обеими степенями свободы, а также вследствие наличия постоянных рассеяния строгое решение уравнения (72a) для двух пар корней: $\lambda_1, \lambda'_1; \lambda_2, \lambda'_2$, представит весьма трудную задачу. Для получения приближенного решения (72a) целесообразно составить эквивалентное уравнение по корням:

$$\lambda_1 = -\Delta_1 \pm in'_1, \quad \lambda_2 = -\Delta_2 \pm in'_2,$$

или

$$\lambda^4 + 2(\Delta_1 + \Delta_2) \lambda^3 + (4\Delta_1 \Delta_2 + n_1^2 + n_2^2) \lambda^2 + 2(n_1^2 \Delta_2 + n_2^2 \Delta_1) \lambda + n_1^2 n_2^2 = 0.$$

Таким образом, для собственных частот (пренебрегая произведениями $b_1 b_2$ и $\Delta_1 \Delta_2$ как сравнительно малыми величинами) путем сравнения коэффициентов имеем

$$\begin{aligned} n_1^2 + n_2^2 &= -\frac{c_{11}}{a_1} - \frac{c_{22}}{a_2} = n_{11}^2 + n_{22}^2, \\ n_1^2 n_2^2 &= \frac{c_{11} c_{22}}{a_1 a_2} - \frac{c_{12}^2}{a_1 a_2} = n_{11}^2 n_{22}^2 - n_{12}^4; \end{aligned} \quad (73)$$

и для постоянных затухания

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 &= \frac{b_1}{2a_1} + \frac{b_2}{2a_2} = \Delta_{11} + \Delta_{22}, \\ n_2^2 \Delta_1 + n_1^2 \Delta_2 &= \frac{c_{22}}{a_2} \cdot \frac{b_1}{2a_1} + \frac{c_{11}}{a_1} \cdot \frac{b_2}{2a_2} = n_{22}^2 \Delta_{11} + n_{11}^2 \Delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Уравнения написаны в таком виде для того, чтобы подчеркнуть перераспределение значений Δ и n^2 в случае, когда две неодинаковых простых системы взаимно связаны; в задаче § 21 это не имело места вследствие наличия там симметрии n_{11}^2 и Δ_{11} по отношению к n_{22}^2 и Δ_{22} .

Чтобы лучше выразить новые собственные частоты через исходные собственные частоты (n_{11}^2 , n_{22}^2), в уравнении (73) положим $n_1^2 + n_2^2 = 2A$ и $n_1^2 n_2^2 = B$ и исключим одну из этих величин. Тогда имеем квадратное уравнение относительно n^2

$$n^4 - 2An^2 + B = 0,$$

причем его корни суть n_1^2 и n_2^2 .

$$n^2 = A \pm \sqrt{A^2 - B} = \frac{n_{11}^2 + n_{22}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(n_{11}^2 + n_{22}^2)^2}{4} - (n_{11}^2 n_{22}^2)}. \quad (73a)$$

Когда n_1^2 и n_2^2 найдены, то решены совместные уравнения (74), которые дают для новых постоянных затухания

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{n_{22}^2 \Delta_{11} + n_{11}^2 \Delta_{22} - (\Delta_{11} + \Delta_{22}) n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}, \\ \Delta_1 &= \Delta_{11} + \Delta_{22} - \Delta_2 \end{aligned} \right\} \quad (74a)$$

После длительных вычислений по формулам (73a) и (74a) мы получаем для системы из диафрагмы и связанного с нею резонатора следующие данные:

$$f_1 = 1120, \quad \Delta_1 = 131,0; \quad f_2 = 885, \quad \Delta_2 = 116,5.$$

Исходные величины для отдельной диафрагмы были

$$f_0 = 1000; \quad \Delta = 200$$

и для отдельного резонатора: $f_0 = 1000; \quad \Delta = 47,5$.

Следует заметить, что если просто связать объем V_0 (без резонаторных свойств, т. е. с закрытым отверстием) с диафрагмой, то коэффициент упругости диафрагмы возрастает от $c_1 (=1,97 \times 10^7)$ до $c_{11} (=2,07 \times 10^7)$, т. е. только, примерно, на 5%, увеличивая, таким образом, собственную частоту диафрагмы до величины $\frac{n_{11}}{2\pi} = 1022$, т. е. только приблизительно на 2%.

Оказывается, что существенное изменение в собственных частотах и более равномерное распределение затухания в системе вызывается связью тяжелой диафрагмы со сравнительно легкой резонирующей системой. Причиной этого явления, очевидно, является кинетическая энергия в устье резонатора, где происходит весьма быстрое движение сравнительно небольшой массы.

Изучение поведения системы в установившемся режиме составляет предмет одной из задач в конце настоящей главы.

26. Задача о нагруженной струне. Фильтры.

Задача о колеблющейся струне с бусами, т. е. длинной натянутой струне, нагруженной равными массами, расположенными на равных расстояниях одна от другой, занимает важное место в механике колебаний.

Отсюда получили начало важнейшие технические приложения, например такие электрические системы, как фильтры¹⁾, столь незаменимые в телефонии. Наиболее существенное из этой теории, пренебрегая рассеянием, мы постараемся вкратце изложить, имея в виду предыдущие выводы.

Длина струны равна $(m+1)l$, ее натяжение τ ; m — число масс, каждая равна a_1 . Тогда кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{1}{2} a_1 (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dots + \dot{\xi}_m^2). \quad (75)$$

При малых смещениях силы, действующие на первую и последнюю частицы, суть соответственно (ср. § 21)

$$2c_1\xi_1 - c_1\xi_2 \quad \text{и} \quad 2c_1\xi_m - c_1\xi_{m-1} \quad \left(c_1 - \frac{\tau}{l}\right),$$

а сила, действующая на r -ю частицу

$$c_1 [(\xi_{r-1} - \xi_r) + (\xi_{+1r} - \xi_r)]$$

и, очевидно, что эти силы можно вывести из функции потенциальной энергии (ср. уравнения 61, 61a):

$$V = \frac{1}{2} c_1 [(\xi_1^2 + (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\xi_3 - \xi_2)^2 + \dots + \xi_m^2)]. \quad (76)$$

Для собственных колебаний имеем m уравнений движения

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{\xi}_1 + c_1 (\xi_1 - 0 + \xi_1 - \xi_2) &= 0, \\ a_1 \ddot{\xi}_2 + c_1 (\xi_2 - \xi_1 + \xi_2 - \xi_3) &= 0, \\ . &. \\ a_1 \ddot{\xi}_m + c_1 (\xi_m - \xi_{m-1} + \xi_m - 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

1) Открытием электрического волнового фильтра мы обязаны Кемпбеллу. Оно изложено в патенте САСШ № 1227113 от 22 мая 1917 г. Лагранж в своей „Аналитической механике“ дал впервые общее решение задачи о нагруженной струне. Routh (Advanced Rigid Dynamics, § 4) после разбора решения Лагранжа утверждает, что может иметь место период возбуждения струны, который „настолько короток, что вдоль „струны не передается никакого движения, имеющего природу волны“. Рэлей (1, § 148a) исследовал вопрос об отражении волн в переходной точке между двумя струнами равного натяжения, но разной нагруженности и вывел уравнение для отношения отраженной и приходящей амплитуды, которое вполне аналогично известному уравнению оптики и идентично уравнению (120) § 31, с которым встретимся при рассмотрении акустического отражения. Аналогия между механической задачей и задачей оптической дисперсии разбиралась многими, начиная от Стокса (Stokes). Статья С. Godfrey (Phil. Mag., 45, 1898, стр. 356) трактует о распространении волн вдоль нагруженной струны и о ее оптической аналогии; статья Винцента (Phil. Mag. 46, 1898, стр. 557) описывает модель дисперсии (периодически отягощаемую пружину), имеющую определенную частотную границу волновой передачи. Наконец, имеется статья Лемба (Mem. Manch. Lit. and Phil. Soc., 42, № 3, 1888, стр. 1) о волнах в среде, обладающей периодической неоднородностью. Лемба нашел, что в такой среде с одним измерением имеются весьма определенные свойства избирательности для волн некоторой частоты и в заключение он заявляет, что „динамически эквивалентной задачей является задача о распространении звуковых волн вдоль трубы, имеющей ряд равноотстоящих одно от другого луковцеобразных утолщений“.

Принимая движение в виде $e^{\lambda t}$, ($\ddot{\xi}_r = \lambda^2 \xi_r$), и полагая $C = 2 + a_1 \frac{\lambda^2}{c_1}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} C\xi_1 - \xi_2 + 0 + \dots &= 0, \\ -\xi_1 + C\xi_2 - \xi_3 + \dots &= 0, \\ \dots &\dots \\ \dots C - \xi_{m-1} + C\xi_m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Соответственно определитель для коэффициентов будет:

$$D_m = \begin{vmatrix} C, & -1, & 0 & \dots & \dots \\ -1, & C, & -1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1, & C, & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0, & -1, & C \end{vmatrix} = 0, \quad (79)$$

m строк.

Очевидно, решение уравнения $D_m = 0$ даст m корней $\lambda^2 \equiv -n^2$; ход решения теоретически тот же, что и в задачах о нескольких степенях свободы, которые мы только что решали. Однако, ввиду алгебраических трудностей применяется специальный прием.

По аналогии со струной длины $3l$, нагруженной двумя частицами, заключаем, что из m видов движения главным является движение, когда все массы находятся в фазе; при этом при возрастании частоты струна будет давать все большее число узлов и пучностей до тех пор, пока каждая колеблющаяся частица не разойдется по фазе с ближайшими соседями.

Таким образом, можно предположить, что разница между собственными частотами будет гармонична (или почти так) при малых частотах, но при более высоких частотах вплоть до наивысшей собственной частоты это расстояние становится все меньше. Аналогией может служить спектр, где отдельные линии к концу диапазона все теснее и теснее сближаются одна с другой.

Для получения из корней уравнения $D_m(C) = 0$ собственных частот мы воспользуемся общеизвестной тригонометрической подстановкой. (Вебстер „Динамика“, стр. 166), которая получается следующим образом: $D_m(C)$ разворачивается путем выражения через первый минор

или

$$\left. \begin{aligned} D_m &= CD_{m-1} - D_{m-2}, \\ CD_{m-1} &= D_m + D_{m-2}, \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

что дает тригонометрическое соотношение

$$2A \sin m\theta \cos \theta = A [\sin (m+1)\theta + \sin (m-1)\theta.] \quad (81)$$

Здесь сделан переход от переменной C к θ . Если теперь $C = 2 \cos \theta$, мы имели бы $D_m = A \sin (m+1)\theta$ при сравнении (81) с (80) и так как $D_1(C) = C = 2 \cos \theta$, то

$$D_1(C) = A \sin (1+1)\theta = 2A \sin \theta \cos \theta$$

или

$$A = \frac{1}{\sin \theta}$$

и, наконец

$$D_m(C) = \frac{\sin (m+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \text{где } C = 2 \cos \theta. \quad (82)$$

Чтобы $D_m(C)$ обратилась в нуль, θ должно быть равно $\frac{k\pi}{m+1}$ (k —любое целое число) или

$$2 + \lambda^2 \frac{a_1}{c_1} \equiv C = 2 \cos \frac{k\pi}{m+1} \quad (83)$$

и так как

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \\ 1 + \frac{\lambda^2 a_1}{2c_1} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(m+1)} \end{aligned} \quad (84)$$

или

$$-\lambda^2 = n^2 - 4 \frac{c_1}{a_1} \sin^2 \frac{k\pi}{2(m+1)}, \quad (85)$$

что дает для собственных частот (полагая $k = 1, 2, 3 \dots m$),

$$f_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{c_1}{a_1}} \sin \frac{1}{m+1} \frac{\pi}{2}, \dots f_m = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{c_1}{a_1}} \sin \frac{m}{m+1} \frac{\pi}{2}. \quad (85a)$$

Таким образом, собственные частоты пропорциональны абсциссам или ординатам квадранта, разделенного на $(m+1)$ равных частей (рис. 8).

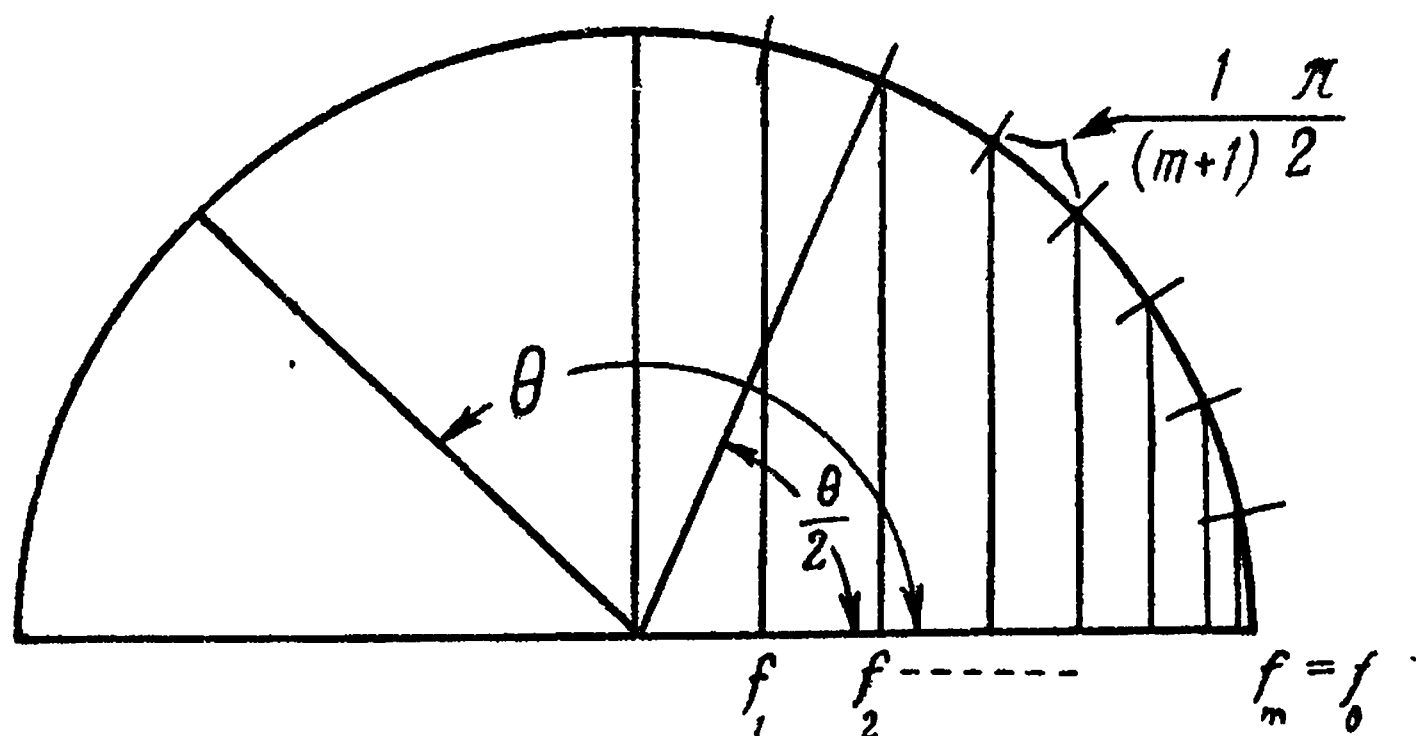


Рис. 8. Расположение резонансных частот, нагруженная струна.

Если число частиц или секций струны очень велико, то для самой высокой собственной частоты можем написать

$$f_m \equiv f_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{c_1}{a_1}}. \quad (85b)$$

Общее решение для собственных колебаний будет иметь вид уравнения (55b); пренебрегая рассеянием, имеем

$$\xi_r = \sum_{k=1}^{m_1} B_k A_{rk} \cos(n_k t + \varphi_k). \quad (86)$$

Напомним, что здесь B_k и φ_k произвольны и не зависят от r , в то время как A_{rk} должно быть согласовано с отношениями $\left(\frac{\xi_r}{\xi_1}\right)_{n=n_k}$ в соответствии с уравнениями группы (78).

Согласно (78) имеем всегда

$$-\xi_{r-1} + C\xi_r - \xi_{r+1} = 0$$

или для $n = n_k$ из (86)

$$-A_{r-1,k} + C_k A_{rk} - A_{r+1,k} = 0,$$

или

$$C_k A_{rk} = A_{r+1,k} + A_{r-1,k};$$

и если $C_k = 2 \cos \theta_k$ вследствие соотношения

$$2 \cos \theta_k \sin r \theta_k = \sin (r+1) \theta_k + \sin (r-1) \theta_k,$$

можно положить

$$A_{rk} = \sin r \theta_k. \quad (87)$$

Далее $\theta_k = \frac{k\pi}{m+1}$, как было определено ранее (см. уравнение 83), и поэтому

$$A_{rk} = \sin \frac{rk\pi}{m+1}. \quad (87a)$$

В конце концов получаем полное решение:

$$\xi_r = \sum_{k=1}^m B_k \sin \frac{rk\pi}{m+1} \cos (n_k t + \varphi_k) \quad (86a)$$

с $2m$ произвольными постоянными B_k и φ_k , подчиняющимися начальным условиям.

Ввиду связи между явлениями установившегося режима и переходного состояния в такого рода системах, что нами уже ранее подчеркивалось, казалось бы, нет необходимости продолжать исследование с целью выявления поведения системы под влиянием непрерывно действующей силы с частотой $\frac{\omega}{2\pi}$; однако, вследствие важности проблемы желательно исследовать случай, когда ω меняется и, таким образом, изучить фильтрующие свойства системы.

Пусть сила $\Psi_1 = \Psi_0 e^{i\omega t}$ приложена к частице (I). Тогда для смещения частиц, ближайших к началу и концу струны, имеем (см. уравнение 60)

$$\xi_1 = \frac{M_1}{D_m} \Psi_1 \text{ и } \xi_m = \frac{M_m}{D_m} \Psi_1, \quad (88)$$

а так как миноры M_1 , D_{m-1} и $M_m = 1$, то получаем

$$\frac{\xi_m}{\xi_1} = \frac{1}{D_{m-1}}. \quad (88a)$$

Далее мы знаем, что если m велико, D_{m-1} имеет ряд из $(m-1)$ корней внутри той же области частот, как и D_m , т. е. внутри области собственных колебаний, и что в этом диапазоне частот $\frac{\xi_m}{\xi_1}$ имеет сравнительно большие значения, что означает, что возникшие на одном конце системы колебания легко распространяются к другому концу. Вопрос в том, каково значение отношения $\frac{\xi_m}{\xi_1}$, когда частота движущей силы становится несколько выше, чем наивысшая из собственных частот системы, а это зависит от значений D_{m-1}^* при $\omega > 2\pi f_0$.

В выражение $C = 2 + \frac{\lambda^2 a_1}{c_1}$ подставляем $-\omega^2$ вместо λ^2 и $\frac{1}{4}n_0^2$ вместо $\frac{c_1}{a_1}$ (см. уравнение 85b); таким образом

$$C = 2 \cos \theta = 2 - 4 \frac{\omega^2}{n_0^2} \quad \text{или} \quad \cos \theta = 1 - 2 \frac{\omega^2}{n_0^2}. \quad (89)$$

Отсюда видно, что при $\omega > n_0$ θ становится мнимым; нам, однако, необходимо определить θ для нахождения D_{m-1} . Если $\theta = ix + \pi$, то можно написать $-\cosh x = \cos(ix + \pi)$ и

$$D_{m-1}(C) = \frac{\sin m(ix + \pi)}{\sin(ix + \pi)} = \frac{(-1)^{m-1} \sinh mx}{\sinh x}, \quad \left. \begin{array}{l} \text{где} \\ \frac{C}{2} = 1 - 2 \frac{\omega^2}{n_0^2} = -\cosh x. \end{array} \right\} \quad (90)$$

Общий вид $D_{m-1}(C)$ в функции от $\frac{\omega}{n_0}$ приведен на рис. 9 для случая $m = 10$. Корни $D_{10}(C)$ (10 собственных частот струны) также изображены вертикальными прямыми.

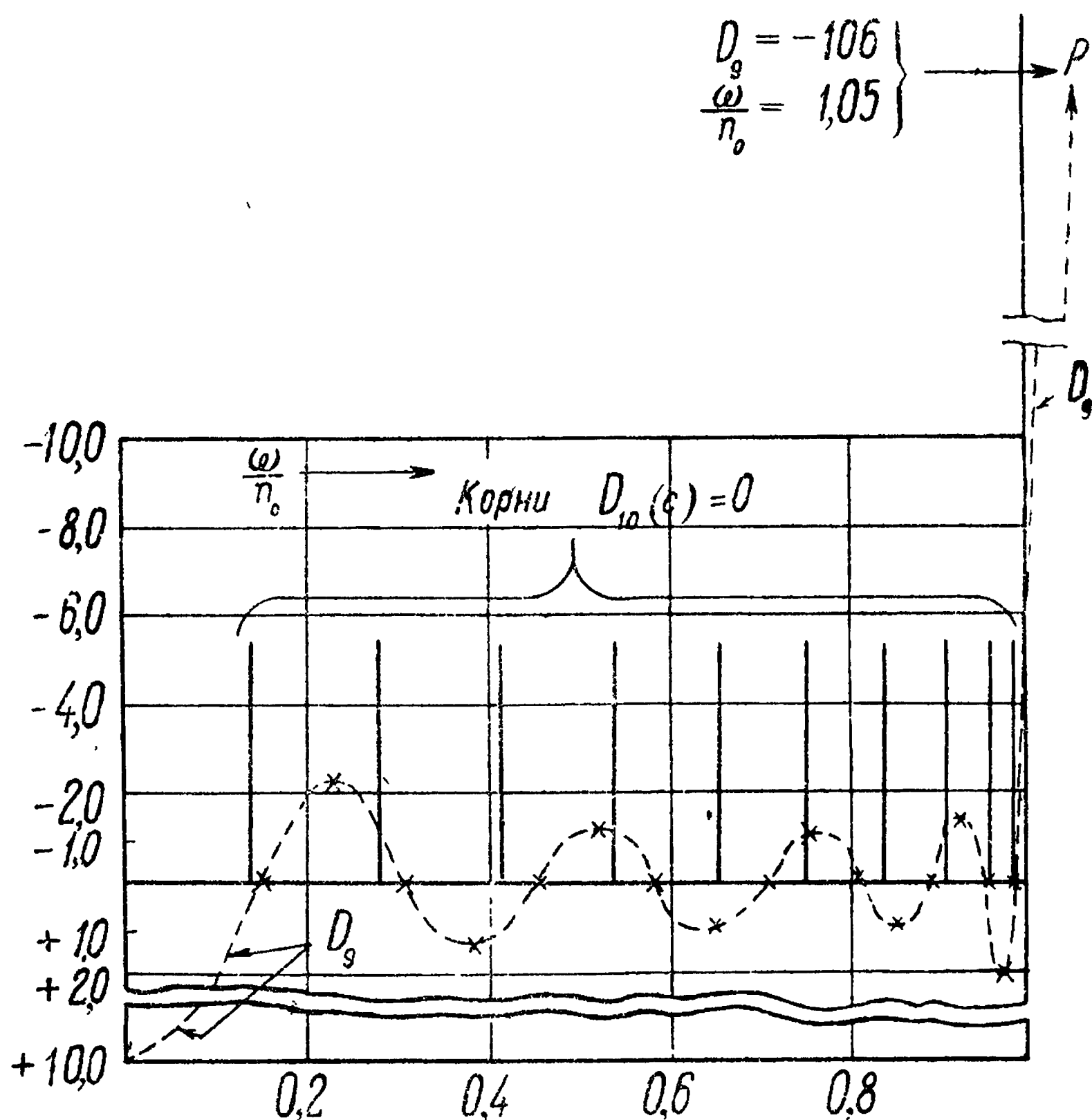


Рис. 9. Свойства $D_{10}(C)$ и $C_g(C)$ (нагруженная струна).

Исследование этого частного случая, основанное на изменениях $D_{10}(C)$ и $D_9(C)$ с ясностью обнаруживает фильтрующее действие равномерно нагруженной в 10 точках струны. Для точки P , которая представляет D_9

при значении $\frac{\omega}{n_0} = 1,05$ и вычислена на основании (88), видна сравнительно малая величина отношения $\frac{\xi_{10}}{\xi_1} = \frac{1}{D_9}$ по сравнению с величинами $\frac{1}{D_9}$ в резонансном диапазоне. При дальнейшем возрастании $\frac{\omega}{n_0}$, D_9 быстро растет, и очевидно, что струна действует как весьма эффективный фильтр низкой частоты, срезающий все колебания с частотами, более высокими, чем $\frac{n_0}{2\pi}$. Если принять во внимание также затухание, то рост D_9 вне пределов полосы пропускания был бы менее быстрый, однако, достаточный для того, чтобы показать фильтрующее действие системы. Общее рассмотрение таких фильтров завело бы нас весьма далеко. Не следует, однако, недооценивать пользы, которую можно извлечь из возможности заменить какую-либо механическую систему соответствующей электрической схемой; причина в том, что существует хорошо разработанная теория такого рода цепей и их свойства достаточно изучены¹⁾. Электротехническая теория в простейшей своей форме касается установившегося режима многозвенной схемы лестничного типа, продольные звенья которой называются последовательными сопротивлениями (Z_1), в то время как поперечные звенья (ступени лестницы) — параллельными сопротивлениями (Z_2). Первым важнейшим свойством такой схемы является ее характеристическое сопротивление, т. е. входное сопротивление при бесконечном числе звеньев. Легко показать, что это сопротивление (для T звена) равно:

$$Z_k = \sqrt{Z_1 Z_2} \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} \quad (90a)$$

Далее, определяя постоянную распространения²⁾ P как логарифм отношения тока в одном звене к току в предшествующем звене, т. е.

$$\frac{I_{(n+1)}}{I_n} = e^P, \quad (90b)$$

имеем

$$P = 2 \log \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} + \sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} \right) \Bigg|_{= \alpha + i\beta} \quad (90c)$$

¹⁾ Сравнивая механические системы с аналогичными электрическими, надо тщательно соблюдать размерность величин. В тексте по большей части принято определять механическое сопротивление как отношение максимальной силы к максимальной скорости. Строго говоря, скорость эквивалентна плотности тока, а не всему току и с этим следует считаться, имея дело с фильтрами или иными подобными системами. Очевидно, что поток $S\dot{\xi} \equiv \dot{X}$ следует рассматривать как аналогию электрического тока I . Например, кинетическая энергия в отверстии равна:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho S^2 \dot{\xi}^2}{K} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{K} \dot{X}^2.$$

Это аналогично кинетической энергии самоиндукции $\frac{1}{2} LI^2$; таким образом, самоиндукция L эквивалентна величине $\frac{\rho}{K}$.

Читатель легко может применить эту идею к коэффициентам упругости и активного сопротивления, которые также входят в выражения полного сопротивления. Можно также, подходя иначе, считать, что электрическому сопротивлению соответствует наиболее полное акустическое сопротивление на единицу поверхности, деленное на эту поверхность.

²⁾ Этот термин неправилен, однако, прочно вошел в обиход. P непостоянно; оно является функцией сопротивления и, следовательно, частоты.

Члены α и β вполне аналогичны коэффициентам затухания и фазы, с которыми мы встретимся в главе III, разбирая вопросы распространения волны в акустической среде. Уравнение (90с) может быть написано в виде:

$$P = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} = 2i \operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{Z_1}{Z_2}}, \quad (90d)$$

отсюда следует, что если $\frac{Z_1}{Z_2}$ находятся в пределах $-4 < \frac{Z_1}{Z_2} < 0$, то P может быть выражено чисто мнимой величиной ($P = i\beta$) и $\alpha = 0$; это означает, что в пределах соответствующего диапазона частот затухание отсутствует, причем крайние частоты, определяемые отсюда, являются границами полосы частот, пропускаемых фильтром. Все указанное вполне справедливо, если только мы пренебрегаем рассеянием энергии; если учесть его, то в полосе пропускания, очевидно, появится затухание; однако, при средних величинах рассеяния определение пограничных частот из условия $-4 < \frac{Z_1}{Z_2} < 0$ с учетом одних реактивных сопротивлений не внесет существенной ошибки¹⁾.

Приведенные элементы простейшей теории волновых фильтров найдут применение в следующем параграфе и в задачах 17 и 18 в конце настоящей главы.

§ 27. Акустические фильтры.

В 1920 году Дж. Стюарт сконструировал (см. Phys. Rev., март, 1921, стр. 382) акустический низкочастотный фильтр, теория которого во всех отношениях параллельна теории низкочастотного электрического фильтра или струны с шариками, о которой шла речь выше. Акустические фильтры представляют собою просто ряд резонаторов, причем для каждого известного электрического фильтра имеется акустический аналог, хотя, конечно, не все одинаково употребительны.

На черт. 10а, 10б, 10с приведены соответственно схемы низкочастотных механического, акустического и электрического фильтров, причем стрелки указывают смещение или скорость движения для собственного колебания наивысшей частоты, т. е. пограничной частоты пропускания. Предполагается, что в каждом случае фильтр имеет бесконечное число одинаковых, следующих одно за другим звеньев; при этом фаза колебаний при переходе от одного звена к следующему меняется. Рядом со схемами приведены простые формулы для определения пограничной частоты, выведенные в предположении, что инерция и упругость полностью сосредоточены в одной точке и при условии пренебрежения активным сопротивлением.

Если учитывать проводимость k , боковых отверстий в объеме V_2 , то более точная формула будет иметь вид:

$$f_0 = \frac{c}{\pi} \sqrt{\frac{S_1}{I_1 V_2} \left[\frac{1}{1 + \frac{4S_1}{k_2 I}} \right]} = \frac{c}{\pi} \sqrt{\frac{k_1}{V_2} \left[\frac{1}{1 + \frac{4k_1}{k_2}} \right]} \quad (B')$$

в соответствии с выводами одной из позднейших статей Стюарта, посвященной общей теории акустических фильтров (Phys. Rev., Dec., 1922 стр 528). Последняя формула может быть получена, если считать, что проводимость

¹⁾ Для более детального ознакомления с теорией фильтров читатель может воспользоваться книгой Джонсона (K. S. Johnson, Circuits for Telephonic Communication XI, XVI, есть русский перевод). Много статей инженеров фирмы Белл об электрических фильтрах опубликовано в BSTJ, например, O. J. Zobel, Jan. 1923, стр. 1.

k_1 требует поправки вследствие наличия проводимостей $\frac{k_2}{2}$, присоединенных с ней последовательно с обеих сторон k_1 ; таким образом, если k_1' есть уточненное значение проводимости, имеем, складывая „сопротивления“:

$$\frac{1}{k_1'} = \frac{1}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{2}{k_2} \quad \text{или} \quad k_1' = \frac{k_1}{\left(1 + \frac{4k_1}{k_2}\right)},$$

что и обуславливает различие между формулой при рис. (10b) и уравнением (В'). Последнее уравнение „дает приближенно экспериментальные величины f_0 , а также удовлетворительно объясняет изменение f_0 с изменением проводимости отверстий, ведущих из звукопровода к объему в ответвлении“ (Стюарт). Заметим, что в формуле Стюарта индексы (1) относятся к свойствам звукопровода, а индексы (2) относятся к ответвлениям, которые включены параллельно к звукопроводу.

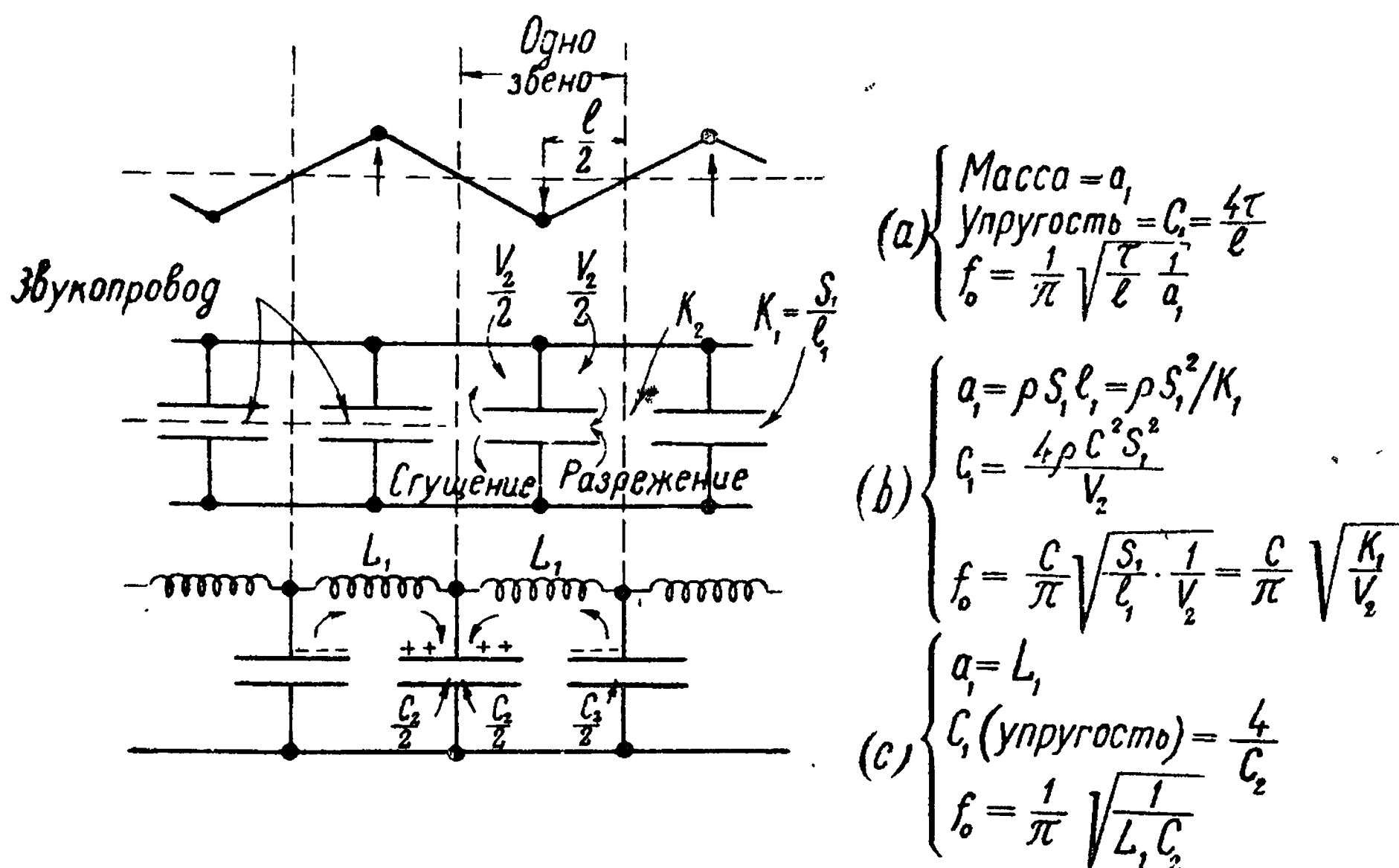


Рис. 10. Аналогии низкочастотного фильтра.

Высокочастотный фильтр изображен схематически на рис. 11. Рядом со схемой представлена приближенная формула для f_0 . Более точная формула, предпочитаемая Стюартом, гласит:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{k_2}{4V_1} \left(1 + \frac{4k_1}{k_2}\right)}. \quad (E')$$

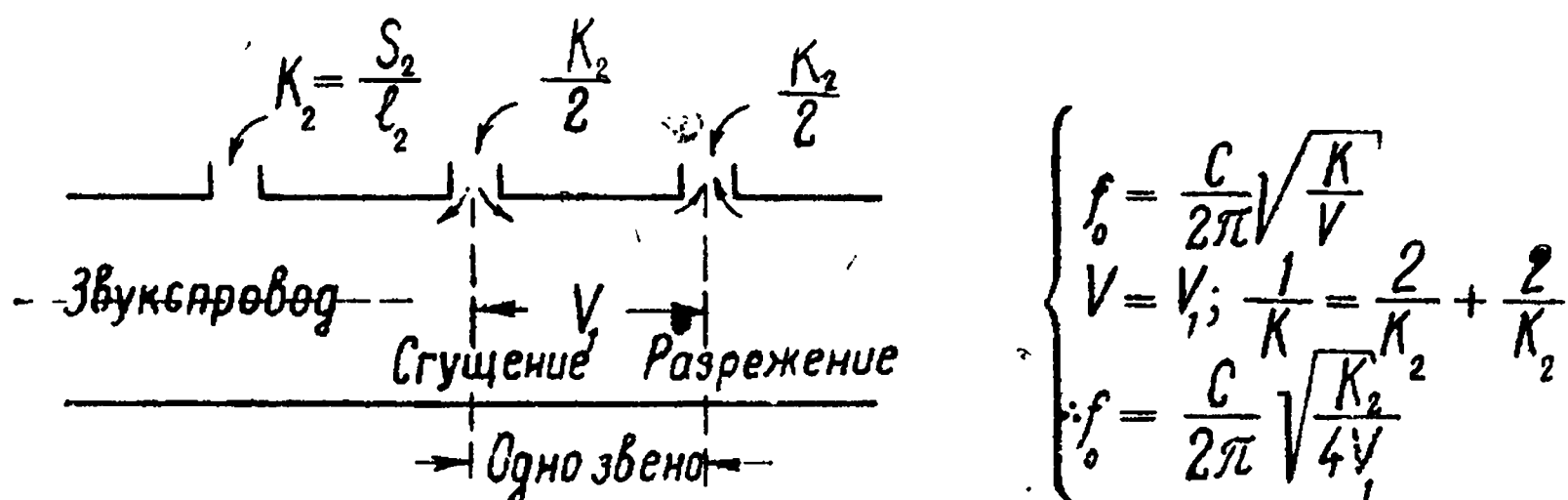


Рис. 11. Акустический высокочастотный фильтр (схематически).

Ее можно получить непосредственно из формулы рис. 11, если считать, что проводимость $2k_1 \equiv \frac{2S_1}{l_1}$ одного звена звукопровода является шунтом для половины проводимости $\frac{k_2}{r}$ каждого из отверстий, обслуживающих данное звено.

Для несовпадения опубликованных кривых затухания (С т ю а р т, loc. cit, и позже Phys. Rev, апрель, 1924 г., стр. 520; также П и к о к в статье непосредственно следующей) с кривыми аналогичных общеупотребительных электрических фильтров не было дано достаточного объяснения. (Заметим, что кривые Стюарта показывают относительную передачу в линейном масштабе, а не в логарифмическом, в „единицах передачи“¹⁾ (transmission units), принятых в телефонных лабораториях. Показатель затухания $\frac{R}{2L}$ одного элемента хорошего электрического фильтра может быть сделан малым, например равным 10 или меньше; такого же порядка может быть затухание части звукопровода, служащего горлышком соответствующего резонатора (например, применяя (69e) $\Delta_2 = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\rho}}$, подставляя $r = 0,75$, что, примерно, соответствует конструкции фильтров Стюарта, имеем $\Delta_2 = 24$, полагая $\frac{\mu}{\rho} = 0,13$ и $\omega = 5 \cdot 10^8$). Стюарт брал для главного звукопровода хорошо сделанную сравнительно широкую трубу; однако, боковые проводимости (k_2) вносят осложнения, особенно в отношении учета рассеяния. Боковые проводимости в низкочастотных фильтрах имеют место вследствие наличия известного числа малых отверстий; мы должны поэтому ожидать в них значительного рассеяния. В высокочастотном фильтре боковые проводимости вызовут добавочные потери на излучение.

Недостаток, происходящий от многократного резонанса²⁾, (который объясняет свойство низкочастотного фильтра не подавлять очень высокие частоты) очевидно присущ резонаторам вследствие непрерывности акустической среды внутри них. Этого недостатка, конечно, нет у конструкций со сосредоточенной нагрузкой, как, например, струна с бусами. Доказано экспериментально, что при помощи пружин и грузиков можно соорудить весьма селективные системы, предназначенные для поперечных, продольных или крутильных колебаний.

§ 28. Конечная струна, нормальные координаты, нормальные функции.

В заключение рассмотрим движение конечной натянутой струны однородной плотности. Задача представляет известный интерес сама по себе и, кроме того, она будет полезна при дальнейшем изучении более общих вопросов.

Пусть ρdx есть масса элемента струны (см. § 10), и смещение равно $\xi(x)$ — тогда, так как сила в направлении ξ , появляющаяся вследствие натяжения τ , равна $\tau \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$, уравнение движения будет $\rho \ddot{\xi} = \tau \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ или

$$\ddot{\xi} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \text{ если } c^2 = \frac{\tau}{\rho}. \quad (91)$$

¹⁾ Два значения мощности W_1 , W_2 различаются на одну „единицу передачи“ (TU), если они находятся в отношении $\frac{W_1}{W_2} = 1,25$ (приблизительно). Общая формула имеет вид

$$N_{TU} = 10 \log_{10} \left(\frac{W_1}{W_2} \right) \text{ см. К. S. Johnson, „Transmission Circuits“, стр. 12.}$$

²⁾ См. графики в статье П и к о к а, на которую мы ссылались выше; также см. позднейшую статью С т ю а р т а Phys. Rev., 25, стр. 90, янв. 1925, в которой он дает необходимое развитие теории.

Не вдаваясь в детали подстановки $\xi = \varphi(x)e^{i\omega t}$, очевидно, что одно из решений имеет вид:

$$\xi = A \cos(nt - \theta) \sin \frac{nx}{c}. \quad (92)$$

Здесь A и θ суть произвольные постоянные, в то время как n следует связать с размером l и постоянной c системы. Для струны длиной l , выбирая начало на одном конце струны, будем иметь $\xi = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, откуда $\frac{nl}{c} = k\pi$ (k — целое число), причем собственные частоты равны:

$$n_1 = \frac{\pi c}{l}, n_2 = \frac{2\pi c}{l}, \dots n_k = \frac{k\pi c}{l} \quad \left(c^2 = \frac{\tau}{\rho}\right). \quad (93)$$

Так, для любого из k собственных колебаний

$$\xi_k = A_k \cos(n_k t + \theta_k) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (94)$$

или для любой начальной формы, налагая в любом желаемом соотношении ряд решений вида (94):

$$\xi(x) = \sum_{k=1}^m A_k \cos(n_k t + \theta_k) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (94a)$$

Теперь сравним результат для n_k с тем, который можно получить косвенно из задачи о нагруженной струне, если полагать расстояния между точками приложения нагрузок столь малыми, что получается как бы непрерывная нагрузка. Переписывая уравнение (85) и замечая, что отрезок l предыдущей задачи эквивалентен dx в данном случае, имеем

$$c_1 = \frac{\tau}{dx}, a_1 = \rho dx, (m+1)dx = l, \\ n_k = 2\sqrt{\frac{c_1}{a_1}} \sin \frac{k}{m+1} \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{\frac{\tau}{\rho dx}} \sin \frac{kdx}{l} \frac{\pi}{2},$$

или, так как аргумент синусоидальной функции бесконечно мал, и можно поэтому заменить синус самим аргументом, то

$$n_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \frac{k\pi}{l} c.$$

Далее что касается члена $\sin \frac{k\pi x}{l}$, который должен быть определен из (87a), а именно:

$$A_{rk} = \sin \frac{rk\pi}{m+1}. \quad (87a)$$

Заметим, что для r -го элемента dx при следовании вдоль струны — $rdx = x$ и так как $(m+1)dx = l$, то

$$A_{rk} = \sin \frac{x}{dx} \frac{dx}{l} k\pi = \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (95)$$

В пределе, переходя от струны, нагруженной в отдельных точках к струне с непрерывной нагрузкой, имеем

$$\xi_r = \sum_{k=1}^m B_k A_{rk} \cos(n_k t + \varphi_k) = \xi(x) = \sum_{k=1}^m B_k \cos(n_k t + \varphi_k) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (95a)$$

результат, аналогичный (94а). Изложенный метод разработан Лагранжем, которому мы обязаны решением задачи о струне с бусами. Читатель, интересующийся скоростью схождения ряда для основной частоты, найдет интересную таблицу у Рэля, том I, § 120. Например, оказывается в случае струны, нагруженной сосредоточенно в шести точках, частота отличается от частоты равномерно нагруженной струны той же массы, длины и натяжения не более чем на 1%. Мы не будем развивать далее этой темы.

Одним из интересных вопросов, который мы теперь рассмотрим, есть вопрос об отношении таких динамических явлений, как изображенное уравнением (94а), к чисто математическим понятиям свойств ряда Фурье. Для вывода (94а) мы сознательно [исходя из того, что синусы и косинусы суть стандартные решения уравнения (91)] пользовались только одним математическим понятием, а именно принципом наложения. Он заключается в том, что любая конечная сумма решений линейного дифференциального уравнения также является его решением. Если, основываясь на этом, распространить суммирование на весьма большое число частных решений, то, решая задачу об однородной струне, тем самым получаем фактически динамическое доказательство законности разложения произвольной начальной формы струны в ряд, содержащий синусы и косинусы. С практической точки зрения можно отметить, что „физическая индукция наиболее полно подтверждена независимым математическим доказательством“ (Лемб, § 39). Читатель с удовлетворением заметит, если он этого уже ранее не сделал, параллелизм, существующий все время между аналитической теорией ряда Фурье и чисто физическими представлениями, получаемыми при применении этого ряда к решению конкретных задач. Вместо хорошо известного аналитического способа интегрирования, например, для определения коэффициентов A_k в (94а), можно с любой желаемой точностью определить их, написав для достаточно большого числа точек струны выражения (так как $n_k t + \theta_k = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \xi(x_1) &= A_1 \sin \frac{\pi x_1}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x_1}{l} + \dots \\ \xi(x_2) &= A_1 \sin \frac{\pi x_2}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x_2}{l} + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

и решить систему совместных уравнений. Это вполне правильно с физической точки зрения, но обычно более кропотливо, чем способ интегрирования, согласно которому

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \xi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad (96a)$$

что легко математически доказать. Более подробный материал по этому вопросу имеется у Лемба в главе о теореме Фурье.

Теперь снова вернемся к теме о нормальных координатах. Разбирая задачу о равномерно нагруженной струне, мы пришли к решению в нормальных координатах; начали же мы с разбора случая струны, нагруженной в отдельных точках, и пользовались ненормальными координатами. В § 10 мы до известной степени предрешали вопрос, полагая, что колебания, возникающие вследствие произвольных симметричных растяжений круглой мембраны, могут быть описаны посредством некоторого ряда, каждый член которого подразумевает нормальную координату. (Разница между множителями $\sin \frac{k\pi x}{l}$ и $J_0(k_j r)$ в обоих случаях в данный момент несущественная). Тогда оказывается, что применение нормальных ко-

ординат, а также и принципа наложения как для струны, так и для мембраны (в обоих масса распределена равномерно) при решении задач является естественным делом; тогда как в случае неравномерного распределения массы это было бы непрактично. Вообще, хотя метод нормальных координат не всегда ведет к цели, если его применять к колебаниям в системе с равномерно распределенными постоянными, все же именно при изучении таких систем метод, главным образом, и применяется.

Наконец, успех применения метода нормальных координат и получаемая выгода от рассмотрения каждого собственного колебания, как не зависящего от остальных, зависит от наличия в нашем распоряжении системы нормальных функций, посредством которых можно для любого момента представить форму колеблющегося тела. Математически ряд функций $F_1(x), F_2(x) \dots F_n(x)$ нормален в интервале (a, b) , если

$$A = \int_a^b F_k^2(x) dx = 1, \quad (97)$$

где $\sqrt{A}$ называется нормализующей постоянной. Например, ряд функций:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}; \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},$$

нормален в интервале $(0, 2\pi)$. Ряд Бесселевых функций также может быть нормализован.

Далее известно, что обычно употребляемые в физике нормальные функции являются также ортогональными: они удовлетворяют соотношению

$$\int_a^b F_j(x) \cdot F_k(x) dx = 0; \quad j \neq k, \quad (98)$$

где интервал (a, b) берется тот же, что и перед этим. Так, имеем

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin jx \sin kx dx &= 0; \quad j \neq k; \\ \int_0^a x J_n(\alpha_j x) J_n(\alpha_k x) dx &= 0, \quad J_n(\alpha_j a) = J_n(\alpha_k a) = 0; \quad j \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (98a)$$

Это просто два примера. Последняя система имеет специальный интерес в связи с задачей о круглой мембране (§ 10); мы установили, что произвольное симметричное начальное растяжение может быть выражено рядом следующего вида (упрощая 29, полагая $\theta_1 = \theta_2 = 0$)

$$\xi(r) = A_1 J_0(\alpha_1 r) + A_2 J_0(\alpha_2 r) + \dots \quad (29a)$$

Это справедливо, если коэффициенты A_k задаются соотношением

$$A_k = \frac{2}{a^2 [J_1(\alpha_k a)]^2} \int_0^a r \cdot \xi(r) \cdot J_0(\alpha_k r) dr, \quad (99)$$

где a — радиус мембраны и $J_0(\alpha_k a) = 0$.

Мы вкратце и без доказательства приводим эти результаты, чтобы дать читателю понимание общего состояния вопроса о применении нормальных функций к решению задачи о нормальных видах колебаний в некоторых системах. К счастью, для однородной струны и мембраны соответствующие нормальные функции известны (в частном случае струны и в сходных задачах, когда нормальными функциями являются функции тригонометрические, разложение заданной функции в ряд синусов и косинусов известно под названием метода Фурье). Для случая колебаний прямоугольной пластинки нормальные функции неизвестны; однако, для большинства задач, с которыми приходится сталкиваться, свойства некоторой системы известных нормальных функций дают ключ к решению.

Необходимым пособием к проработке теории нормальных функций после главы о ряде Фурье из Лемба должна явиться книга Уайттекера и Ватсона „Современный анализ“.

ЗАДАЧИ.

11. Решите задачу 21 [т. е. выведите уравнение (55a)], пользуясь двумя нормальными координатами.

12. Некоторая электрическая цепь (обмотка телефона) с самоиндукцией L и активным сопротивлением R действует на колеблющуюся систему диафрагмы с силой Q_1 (дин) на каждую абсолютную единицу силы тока, протекающего по цепи. Подвижная система индуктирует в цепи электродвижущую силу, равную Q_2 единиц (CGS) на единицу скорости. Полагая постоянные колеблющейся части равными a, b, c (в обычном обозначении), найти входное сопротивление электрической цепи, если колеблющаяся часть в резонансе.

13. (a) Сферический тонкостенный резонатор имеет объем 400 см^3 и снабжен круглым отверстием радиуса 1 см . Найти собственную частоту и коэффициент затухания, полагая скорость звука в воздухе при обычных температурах равной $3,4 \cdot 10^4 \text{ см/сек}$.

(b) То же отверстие резонатора снабжено трубкой диаметром 2 см и длиной 4 см . Вычислить собственную частоту и затухание вследствие излучения при этих новых условиях; оценить также величину затухания вследствие трения в горлышке.

14. В § 25 решена одна из задач на свободные колебания. Пользуясь ее данными, написать уравнение для скоростей $\dot{\xi}_1$ и $\dot{\xi}_2$, если в центре диафрагмы действует сила $\Psi_0 \cos \omega t$; вычислить также отношение $\frac{\dot{\xi}_2}{\dot{\xi}_1}$ при резонансных частотах системы.

15. Струна с тремя находящимися на равных расстояниях бусинами получила начальное смещение, так что $\xi_1 = +1$, $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = -1$. Полагая $\frac{c_1}{a_1} = 10^7$, определить постоянные B_k , A_{rk} , n_k и φ_k уравнения (86) и (86a) при нулевой начальной скорости.

16. Гибкая однородная струна длины l оттянута и предоставлена самой себе, причем смещение точек, отстоящих от одного конца на $\frac{l}{4}$, $\frac{l}{2}$ и $\frac{3l}{4}$ суть соответственно $+1, 0, -1$. Полагая, что основное колебание этой струны соответствует данным задачи 15, сравнить между собой движение трех соответственных точек на обеих струнах. [Взять первые четыре, не обращающиеся в нуль, члена разложения в ряд Фурье согласно (94a)].

17. Для нагруженной струны (§ 26) составить эквивалентный электрический фильтр (т. е. определить механические реактивные сопротивле-

ния, соответствующие L и C) и сделать поверку путем определения отношения между $\frac{Z_1}{Z_2}$ и $C = 2 \cos \theta$ (уравнение 82) при пограничных частотах полосы пропускания.

18. Начертить для фильтра, изображенного на рис. 12, схему аналогичного электрического фильтра и определить, исходя из этого сопоставления или каким-либо другим способом, пограничные частоты фильтра.

19. Сконструировать низкочастотный фильтр (low-pass torsional filter), способный служить связью между двумя вращающимися цилиндрическими валами, и определить его верхнюю пограничную частоту.

20. Двойной резонатор состоит из двух связанных резонаторов, имеющих каждый объем V_0 . Первый резонатор сообщается с наружным воздухом посредством отверстия площади S и проводимости K ; связь между обоими резонаторами осуществляется таким же отверстием. На первое отверстие падает плоская волна с амплитудой давления $p_1 e^{i\omega t}$. Пренебрегая затуханием во внутреннем отверстии, найти собственные частоты связанной системы и полное усиление скорости системы при этих частотах.

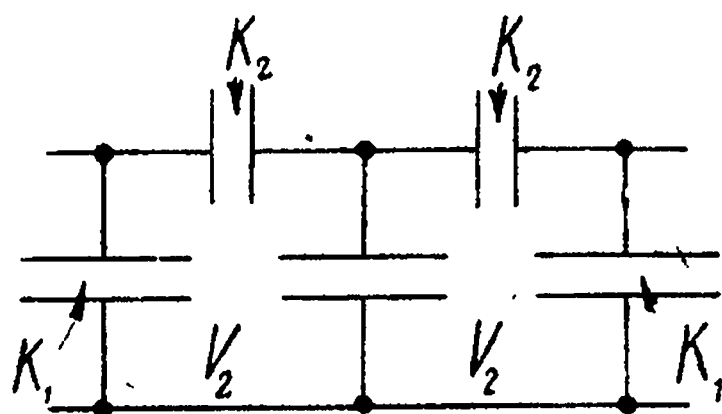


Рис. 12. К задаче 18.

Каковы эти коэффициенты по сравнению с усилением скорости одним лишь резонатором при его резонансной частоте? Как можно уменьшить связь между резонаторами и как бы это сказалось на степени усиления избранной частоты? (E. T. Paris, Science Progress, XX, № 77, 1925, стр. 68).

ГЛАВА III.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА.

§ 30. Свойства среды; уравнение волнового движения.

В главе I мы рассмотрели простейший тип колебательной системы. Согласно принятой там точке зрения, все части системы колеблются в фазе, т. е. в каком-либо определенном положении в процессе колебаний находятся одновременно все части системы.

В главе II мы видели результат взаимной связи ряда простых звеньев, образующих длинную цепь; мы заметили, что колебания такой системы сводятся к явлениям волнового характера, поскольку имеются периодические изменения фазы при переходе от одного элемента цепи к следующему; мы заметили также, что в пределе свойства длинной цепи, составленной из одинаковых звеньев, одинаковым образом взаимно связанных, в смысле распространения волны приближаются к свойствам непрерывной среды. Логично и целесообразно поэтому приступить здесь же к вопросу о распространении волны в акустической среде.

Звуковые волны появляются всегда, когда на границу или на какую-либо часть сжимаемой жидкости действует переменное колебательное

давление. Поэтому сначала следует установить физические свойства среды; в первую очередь рассмотрим специфические свойства, выразив их через средние величины объема и плотности в какой-либо точке жидкости. Для малых приращений объема и плотности это будет

а) расширение

$$\Delta = \frac{\delta v}{v_0}, \quad \text{т. е. } v = v_0(1 + \Delta); \quad (101)$$

б) уплотнение

$$s = \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad \rho = \rho_0(1 + s). \quad (102)$$

(Заметим отсюда, что если $\rho v = \rho_0 v_0$,

$$\text{то} \quad s = -\Delta \text{ и } (1 + s)(1 + \Delta) = 1, \quad (103)$$

если пренебречь произведением $s\Delta$ как бесконечно малой второго порядка).

Для совершенно упругой жидкости при малых значениях сжатия установлено

$$-\frac{\delta v}{v_0} \cdot \frac{1}{\delta p} = C; \quad C = \frac{1}{\kappa}, \quad (104)$$

где C — сжимаемость и κ — объемный модуль или коэффициент объемной упругости. Если среда представляет собою газ, претерпевающий медленные (изотермические) изменения объема, имеем также $v = p_0 v_0$, откуда

$$\frac{\delta p}{p_0} = -\frac{\delta v}{v_0} = s \quad (104a)$$

и коэффициент объемной упругости равен:

$$\left. \begin{array}{l} \text{с)} \\ \text{откуда} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \kappa = \frac{\delta p}{\frac{\delta v}{v_0}} = p_0 = \frac{\delta p}{s}, \\ p = p_0 + \kappa s \end{array} \quad (105)$$

Для совершенного газа действительны вышеуказанные (101—103) соотношения, однако, при быстрых изменениях p и v необходимо пользоваться адиабатическим соотношением $p v^\gamma = p_0 v_0^\gamma$; следовательно, в этом случае

$$\frac{\delta p}{p_0} = -\gamma \frac{\delta v}{v_0} = \gamma s \quad (104b)$$

и коэффициент объемной упругости равен:

$$\left. \begin{array}{l} \text{с')} \\ \text{откуда} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \kappa' = \gamma p_0 = \frac{\delta p}{s}, \\ p = p_0 + \kappa' s. \end{array} \quad (105a)$$

Общая зависимость, имеющая место для данного малого объема любой среды, формулируется следующим образом:

„Разность между количествами жидкости, втекающими и вытекающими из малой замкнутой поверхности в течение малого промежутка времени δt , должна быть равна приращению за тот же промежуток времени количества жидкости, содержащегося внутри поверхности“.

Это есть „принцип непрерывности“; попытаемся придать ему математическую форму для движения в одном направлении, именно вдоль оси x . Пусть рассматриваемый объем представляет собою элементарный слой толщиной dx , противолежащие грани которого имеют площадь A , нормальную к оси x . Тогда поток, проходящий сквозь поверхности элемента за время δt , будет

$$\delta t \left[\rho \dot{\xi} - \left(\rho \dot{\xi} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \dot{\xi}) dx \right) \right] A = - A dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho \dot{\xi}) \delta t$$

в то время, как приращение количества содержащейся жидкости равно:

$$\delta t \cdot A dx \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

и, следовательно:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \dot{\xi}) = 0. \quad (106)$$

Последнее и есть „уравнение непрерывности“. Это кинематическое соотношение, которое легко обобщить для движения в трех измерениях, является, пожалуй, одним из самых полезных в гидродинамике.

Заменяя в (106) ρ выражением $\rho_0(1+s)$ и пренебрегая $s\dot{\xi}$ по сравнению с $\dot{\xi}$, получаем более удобное для нас выражение

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} = 0, \quad (106a)$$

откуда

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial x^2} = 0. \quad (106b)$$

Если теперь p есть избыточное давление на одну грань элемента $A'dx$ и $p + dx \frac{\partial p}{\partial x}$ — давление на противоположную грань, то результирующая сила, обусловливаемая давлением, равна $A'dx \frac{\partial p}{\partial x}$, и, принимая во внимание изменение силы инерции элемента, имеем уравнение движения

$$A'dx \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \ddot{\xi} \right) = 0. \quad (107)$$

Подставляя κs вместо p , согласно (105), и дифференцируя (107) по времени, имеем

$$\kappa \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \rho \frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial t^2} = 0. \quad (107a)$$

Сопоставляя (107a) и (106b), получаем

$$\frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \dot{\xi}}{\partial x^2}. \quad (108)$$

Это есть уравнение распространения звуковой волны (продольной или „волны сжатия“), причем $c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$ представляет скорость распространения. $\dot{\xi}$ есть скорость частицы в любой точке среды; для ξ мы получили бы такого же вида уравнение как и для $\dot{\xi}$. Аналогичное по форме уравнение мы вывели при разборе задачи о колеблющейся струне (см. 91), однако, волновая скорость в этом случае $\left(\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \right)$ относилась к распро-

странению поперечных возмущений вдоль струны. В совершенных жидкостях можно рассматривать только продольные волны; в твердых телах возможны как продольные, так и поперечные волны; последний случай зависит от упругости среды по отношению к срезающим напряжениям.

Все ступени вывода уравнения (108) одинаково хорошо применимы к случаю упругого твердого стержня, если только вместо k брать постоянную продольной упругости (модуль Юнга). Физические константы различных твердых и жидких средин, включая $c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$ и $R = \sqrt{\kappa \cdot \rho}$, две основных в теории передачи звука постоянных, приведены у Драйсделя („Mechanical Properties, etc.“, стр. 288 — 292).

§ 31. Свойства плоских звуковых волн.

При изучении важнейших свойств плоских звуковых (воздушных) волн будем основываться на том факте, что каждая из величин ($\xi, \dot{\xi}, \rho, s, \Delta, \partial p$), относящаяся к состоянию одного из элементов среды, должна одинаково удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \theta = \xi, \dot{\xi}, \Delta, s, \rho, \partial p. \quad (108)$$

Из этого уравнения сделаем только вывод, что решения должны быть вида:

$$\theta = Af(ct - x) + B \cdot F(ct + x) \quad (109)$$

и что, следовательно, общее решение дает для каждой из величин θ два волновых колебания произвольного вида, распространяющихся в противоположные стороны со скоростью c . Значения A и B , а также вид функции $f(ct - x)$ и $F(ct + x)$ подлежат определению по граничным условиям данной конкретной задачи.

Выбор величины θ (например уплотнение, избыточное давление, скорость частицы или др.), которым следует пользоваться в каждом данном случае, зависит от природы задачи.

Так, в случае замкнутой трубки с многократными отражениями на концах, можно было бы, как в задаче о струне, изучить величину смещения ξ ; тогда решение имело бы вид:

$$\xi = A \left[\sin \left(\omega t + \frac{k\pi x}{l} \right) - \sin \left(\omega t - \frac{k\pi x}{l} \right) \right] = 2 A \cos \omega t \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (109a)$$

Оно, очевидно, удовлетворяет дифференциальному уравнению и граничным условиям, если

$$\frac{\omega l}{k\pi} = c, \quad \text{т. е. если } \lambda_k = \frac{2l}{k}, \quad \text{так как } f_k \lambda_k = c, \quad (109b)$$

причем λ — длина волны, f_k — частота одного из собственных колебаний трубы. Теперь положим, что изучается распространение одиночного импульса, первоначальная форма волны которого задана выражением:

$$\left. \begin{aligned} \delta p|_{t=0} = f(x) = 1, \quad \text{для } 0 < x < x_0 \\ \delta p|_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (109c)$$

и для прочих значений x ,

тогда пренебрегая рассеянием энергии вследствие трения и рассматривая распространение лишь в положительном направлении, мы имели бы

$$\left. \begin{aligned} \delta p = f(x - ct) = 1 \text{ для } ct < x < ct + x_0 \\ \delta p = 0 \end{aligned} \right\} \quad (109d)$$

для прочих значений x .

Эти примеры иллюстрируют чисто кинематические свойства, описываемые уравнением (108).

Теперь рассмотрим динамический вопрос, а именно задачу об энергии плоской волны. Поршню с площадью, равной единице, сообщено колебательное движение $\xi_0 \cos \omega t$; это движение передается столбу воздуха единичного поперечного сечения, простирающемуся в бесконечность. На некотором расстоянии, взятом вдоль столба, мы имели бы для смещения частицы

$$\xi(x) = \xi_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (110)$$

что согласуется с (108), (109) и со специальными условиями, о которых мы упоминали.

Сначала рассмотрим потенциальную энергию. Избыточное давление δp , вызывающее какое-либо заданное уплотнение s , равно $x's$ (105a). Таким образом, в слоевом элементе объема dx имеем

$$dx \cdot V = dx \int_0^s x' s ds = \frac{1}{2} dx x' s^2. \quad (111)$$

Кинетическая энергия равна:

$$dx \cdot T = \frac{1}{2} dx \cdot \rho \dot{\xi}^2. \quad (112)$$

Можно легко показать, что в любой точке плоской волны кинетическая энергия равна потенциальной энергии. Если ξ представляет смещение в точке x , то в точке $x + dx$ смещение равно:

$$\xi + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

и имеем

$$s = -\Delta = -\frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (113)$$

Теперь из (110) следует, что

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = -c \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (114)$$

и значит

$$cs = \dot{\xi} \text{ и } dx \cdot T = \frac{1}{2} dx \cdot \rho c^2 s^2 = \frac{1}{2} dx \cdot x' s^2, \quad (112a)$$

что идентично ¹⁾ (111). Таким образом, полная энергия $dx(T + V)$

¹⁾ Символическое решение уравнения

$$\ddot{\xi} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = c^2 \xi'' \quad (108)$$

легко приводит к результату $\dot{\xi} = \pm cs$ для волны, имеющей скорость $\pm c$.

Рассматривая точки и „примы“ как операторы, имеем:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - c^2 \xi'' &= (\dot{\xi} + c\xi')(\dot{\xi} - c\xi') = 0 \\ (\dot{\xi} + c\xi') &= 0, \quad \dot{\xi} = -c\xi' = cs \\ (\dot{\xi} - c\xi') &= 0, \quad \dot{\xi} = c\xi' = -cs \end{aligned} \quad (108a)$$

распределяется поровну между кинетической и потенциальной энергией и „так как ξ того же знака, что и s , то частица воздуха движется вперед (т. е. с волнами), когда через нее проходит фаза уплотнения и назад во время разрежения“ (Лемб, § 60). Чтобы получить среднюю плотность энергии E в среде, надо проинтегрировать $2T \cdot dx$ или $2V \cdot dx$ в пределах целого числа длин волн и разделить результат на рассматриваемый объем, именно:

$$E \cdot \lambda = \int_x^{x+\lambda} 2T dx = \kappa' \int_x^{x+\lambda} s_0^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) dx = \frac{\kappa' s_0^2}{2} \int_x^{x+\lambda} \left[1 + \cos 2\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] dx$$

или замечая, что интеграл периодического члена обращается в нуль (так как $\frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi$)

$$E \lambda = \frac{1}{2} \kappa' s_0^2 \lambda, \quad E = \frac{1}{2} \kappa' s_0^2, \quad (115)$$

где s_0 — наибольшее уплотнение.

„Интенсивность“ определяется как скорость потока энергии, проходящего сквозь какую-либо неподвижную плоскость, нормальную к столбу воздуха. Она, очевидно, равна произведению плотности энергии на скорость потока c . Следовательно:

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{1}{2} \left(\kappa' s_{\text{max}}^2 \right) c = \frac{1}{2} \frac{c}{\kappa'} \left(\delta p_{\text{max}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(\delta p_{\text{max}})^2}{\rho c}, \quad (116)$$

так как

$$\delta p = \kappa' s. \quad (105a)$$

Это выражение для интенсивности, определяющее ее через избыточное давление δp , является наиболее употребительным. Как выяснится позже, оно действительно одинаково как для плоских, так и для расходящихся волн.

Мощность поршня, затрачиваемая на создание звуковой волны, равна $\xi \delta p$. Так как

$$\delta p = \kappa' s \quad \text{и} \quad s = \frac{\dot{\xi}}{c} \quad (112a),$$

$$\delta p = \frac{\kappa' \dot{\xi}}{c},$$

имеем

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{поршень}} = \dot{\xi} \cdot \delta p = \frac{\kappa'}{c} \dot{\xi}^2 = \sqrt{\kappa' \rho} \dot{\xi}^2 = R \dot{\xi}^2, \quad (117)$$

а также более простое соотношение:

$$\delta p = \frac{\kappa'}{c} \dot{\xi} = \sqrt{\kappa' \rho} \dot{\xi} = R \dot{\xi}. \quad (117a)$$

Этот важный результат определяет величину $R = \sqrt{\kappa' \rho}$, являющуюся сопротивлением излучения ¹⁾ среды на единицу поверхности (§ 3, гл. I). Заметим, что в форме

$$\sqrt{\kappa' \rho} \equiv R = \rho c, \quad (117b)$$

¹⁾ В обозначении этой величины нет единодушного мнения. Инженер предпочтет название „характеристическое сопротивление среды“; Драйсдель дает термин „акустическое сопротивление“, термин, заимствованный у Brillié (Etude des Ondes Acoustiques, etc., „Le Génie Civil“, 75, 1919; Aug. 23, p. 171; Aug. 30, стр. 194 et Sept. 6, p. 218). Термин „сопротивление излучения“ был предложен Никольсом (H. W. Nichols Phys., Rev., 10, 1917, стр. 193).

эта величина появляется во многих формулах, заключающих в себе излучение; например, в затухании резонатора вследствие излучения (§ 24 и уравнение (175). Таблицы величин $\sqrt{\kappa'_p}$ имеются у Драйсделя (Drysdale), о чем мы уже упоминали.

Теперь займемся другим свойством плоских волн — именно нормальным их отражением на границе двух сред. Пусть плоскость $x = 0$ будет границей между средами (1) и (2). Выбрав решение уравнения (108) в форме (109), имеем для волн в среде (1) слева от начальной плоскости

$$\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_{01} e^{i\omega(t - \frac{x}{c_1})} + \dot{\xi}'_{01} e^{i\omega(t + \frac{x}{c_1})}. \quad (118)$$

Два члена в правой части изображают здесь соответственно скорости частиц в падающей и отраженной волнах.

Аналогично для распространившейся в среду (2) волны

$$\dot{\xi}_2 = \dot{\xi}_{02} e^{i\omega(t - \frac{x}{c_2})}. \quad (118a)$$

Для определения отношений $\frac{\dot{\xi}'_{01}}{\dot{\xi}_{01}}$ и $\frac{\dot{\xi}_{02}}{\dot{\xi}_{01}}$ нам необходимы два уравнения. Их можно составить по граничным условиям, которые состоят в том, что как скорость, так и избыточное давление должны быть непрерывны. (Некоторые из других величин ψ (108), удовлетворяющих дифференциальному уравнению, также должны быть непрерывны; однако, достаточно разобрать только две величины, причем здесь выбраны те, которые наиболее прямым путем ведут к цели).

Заметим, что скорости суть векторы, в то время как избыточные давления (одной природы с гидростатическим давлением), строго говоря, не могут считаться векторами. Разность фаз между $\dot{\xi}_{01}$ и $\dot{\xi}'_{01}$ до сих пор не определена. Для нахождения давлений воспользуемся соотношением $\partial p = \pm c \rho \dot{\xi}$, обращая особое внимание на знак перед c , который зависит от направления распространения; это необходимо потому, что на границе двух сред не может происходить накопление некомпенсированного давления. Поэтому на границе имеем

$$\dot{\xi}_{01} + \dot{\xi}'_{01} = \dot{\xi}_{02}, \quad (119)$$

$$\partial p_{01} + \partial p'_{01} = \partial p_{02},$$

т. е.

$$c_1 \rho_1 \dot{\xi}_{01} - c_1 \rho_1 \dot{\xi}'_{01} = c_2 \rho_2 \dot{\xi}_{02}, \quad (119a)$$

или

$$R_1 (\dot{\xi}_{01} - \dot{\xi}'_{01}) = R_2 \dot{\xi}_{02}.$$

Рассматривая (119) и (119a) как совместные уравнения, получаем решения ¹⁾:

$$\frac{\dot{\xi}_{02}}{\dot{\xi}_{01}} = \frac{2R_1}{R_1 + R_2} \text{ и } \frac{\dot{\xi}'_{01}}{\dot{\xi}_{01}} = -\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}. \quad (120)$$

Если теперь $R_2 > R_1$, т. е. вторая среда обладает большим сопротивлением, чем первая, то, очевидно, что скорость частиц в отраженной

¹⁾ Уравнения (120) тождественны уравнениям Френеля для нормального оптического отражения, если только сопротивление излучения R заменить показателем преломления.

волне претерпела изменение фазы на π по отношению к скорости частиц в падающей волне; однако, разности фаз между ξ_{01} и ξ_{02} нет, причем последнее обозначение относится к проходящей волне. Очевидно также, что в то время как скорость частиц при отражении меняет фазу на π , фаза избыточного давления остается неизменной.

В проходящей волне фазы как избыточного давления, так и скорости частиц во всех случаях остаются неизменными.

Если, наоборот, $R_2 < R_1$, то фаза скорости частиц остается при отражении без изменения, в то время как избыточное давление меняет свою фазу на π . И, наконец, при $R_2 = R_1$ отраженной волны не появляется, и распространение во вторую среду происходит беспрепятственно.

Первое отношение в (120) может быть названо „коэффициентом пропускания“ t_{12} , второе отношение есть „коэффициент отражения“ r (по амплитуде).

Поменяв индексы, имеем $t_{21} = \frac{2R_2}{(R_1 + R_2)}$, откуда следует важное соотношение:

$$\left. \begin{aligned} t_{12}' t_{21} &= 1 - r^2, \\ t_{12} &= \frac{2R_1}{R_1 + R_2}; \quad r = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \end{aligned} \right\} \quad (120a)$$

где

То же самое можно получить, применив принцип сохранения энергии к падающей отраженной и проходящей волне. Классическим примером отражения является отражение звука в воздухе от поверхности воды; в этом случае [$R_2 = 1,4 \cdot 10^5$, $R_1 = 40$; $c_2 = 1,4 \cdot 10^5$; $c_1 = 3,3 \cdot 10^4$ (таблица Драйсделя)].

$$(\xi'_{01})^2 = 0,999 (\xi_{01})^2$$

и, следовательно, волна при переходе из воды в сталь сохраняет около 13% своей первоначальной энергии. Интересно другое следствие. Если границей первой среды служит (почти) твердая стенка, в которой имеется малое отверстие, содержащее мембрану (или другой обнаруживающий звук прибор), то из (199a) и (120) имеем

$$\delta p_{02} = \delta p_{01} + \delta p'_{01} \doteq 2\delta p_{01} \quad (\text{приближенно}) \quad (121)$$

откуда можно вычислить движение мембраны, если известно ее сопротивление.

§ 32. Распространение звука в трубах.

Пользуясь простой теорией, изложенной в предыдущих параграфах, можем решать (правда, не очень изящно) некоторые задачи о распространении звуковых волн в трубах. Мы сделаем некоторые ограничения, чтобы обойти математические трудности; допустим, например, что стенки трубы жестки ¹⁾; при этом для более интересной постановки задачи мы

¹⁾ Это ограничение важно потому, что если среда обладает инерцией и упругостью, сравнимыми с теми же свойствами материала стены, то стена будет заметно влиять на избыточное давление внутри. Отсюда два следствия: 1) уменьшение эффективно упругости среды и, следовательно, уменьшение скорости движения волны в ней; 2) вследствие рассеяния в самой стенке и бокового излучения от стенки волна в среде получает повышенное затухание. Этот вопрос был разобран Лембом (§ 62; также Менч. *Manchester Phil. and Lit. Soc.*, 42, № 9, 1898, стр. 1), который нашел (например), что когда волна заключалась в стеклянную трубку, толщина которой составляла 0,1 ее радиуса, то фазовая скорость в воде уменьшалась на 24% по сравнению с ее обычной величиной при твердых стенках сосуда.

допустим существование трения, однако, специально определять частный вид коэффициента сопротивления не будем. Эту самостоятельную часть задачи читатель найдет в приложении А. Взяв трубу с поперечным сечением, равным единице, снова выведем уравнение движения волны в предположении, что $R_1 \xi$ равно составляющей градиента отрицательного давления, находящейся в фазе со скоростью R_1 аналогично омическому сопротивлению на единицу длины в электрической линии; фактически задача в целом может считаться параллельной соответствующей задаче электротехники, если между парой проводов отсутствует утечка.

Пусть избыточное давление, в какой-либо точке x трубы равно $p = \kappa' s = -\frac{\kappa' \partial \xi}{\partial x}$; чистое избыточное давление, действующее на слой толщиной dx , равно поэтому $dx \frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa' dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$. Оно частично компенсируется силой инерции слоя, равной $\rho dx \cdot \ddot{\xi}$.

Составляющая чистого избыточного давления, работающая против трения, равна $dp_f = R_1 \dot{\xi} dx$, так как $\frac{\partial p_f}{\partial x}$ есть эффективный градиент давления. Складывая все эти силы и приравнявая нулю сумму, имеем

$$\rho \ddot{\xi} dx + R_1 \dot{\xi} dx - \kappa' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = 0 \quad (122)$$

или, предпочитая оперировать только со скоростью:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial \xi}{\partial t} = \kappa' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (122a)$$

Это уравнение тождественно с (108) за исключением члена, выражающего трение (аналогичное выражение для электрической цепи есть

$$L \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + R \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \quad (122b)$$

причем постоянные L , R и C рассчитаны на единицу длины линии, как и в акустической задаче). (Fleming „Propagation of Electric Waves“, 3-е изд., 1919, стр. 125).

Предполагая решение в форме $\xi = A e^{i\omega(t - \frac{x}{c_1})}$, находим при подстановке

$$-\omega^2 \rho + i R_1 \omega = -\frac{\kappa_1 \omega^2}{c_1^2}$$

или

$$\frac{1}{c_1^2} = \frac{\rho}{\kappa'} - \frac{i R_1}{\omega \kappa'} = \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{i R_1}{\omega \rho} \right] \quad (123)$$

или, если $\frac{R_1}{\omega \rho}$ малая величина:

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c} \left[1 - \frac{i R_1}{2 \omega \rho} \right]. \quad (123a)$$

Комплексное выражение для волновой скорости получилось как естественное следствие рассеяния в системе передачи, совершенно так же, как появляется комплексное выражение для собственной частоты колебательной системы, когда в ней имеется затухание.

Интересный опыт, который читатель может сам проделать, покажет влияние тонкостенной резиновой трубки на затухание распространяющейся в заключенном в трубке воздухе звуковой волны.

Подставляя выражение для $\frac{1}{c_1}$ в формулу, принятую для решения, имеем для волны, бегущей в положительном направлении

$$\left. \begin{aligned} \xi &= Ae^{i\omega \left(t - \frac{x}{c} + \frac{iR_1 x}{2\omega \rho c} \right)} = Ae^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \beta x)}; \\ \beta &= \frac{\omega}{c}, \quad \alpha = \frac{Ri}{2\rho c}. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

В такого рода уравнениях α называется показателем затухания; β — угловым множителем и $\alpha + i\beta$ — постоянной распространения, о чем мы упоминали уже, разбирая в § 26 случай многозвенной электрической цепи (часто мы будем обозначать угловой множитель буквой κ , когда $\alpha = 0$, т. е. когда отсутствует затухание вследствие трения).

В (124) фазовая скорость равна $\frac{\omega}{\beta}$; если α мало (как здесь), то фазовая скорость равна волновой скорости в случае отсутствия рассеяния.

Если же α велико (как в задачах § 51 и приложении А), то фазовая скорость будет заметно меньше, чем $c \equiv \sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho}}$ для свободной среды.

Теперь рассмотрим явления в конечной трубке длиной l , закрытой с обоих концов колеблющимися поршнями. Для определенности пусть поршень на одном конце (который будем считать началом) подает системе мощность при постоянной частоте; поршень на другом конце приводится в движение избыточным давлением звуковых волн, дошедших до его поверхности и ею отраженных. Граничные условия можно представить следующим образом:

	$x = 0$	$x = l$
Сопротивление поршня	Z_0	Z_l
Приложенная сила	$\Psi = \Psi_0 e^{i\omega t}$	0
Скорость	$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 e^{i\omega t}$	$\dot{\xi}_l e^{i\omega t}$
Давление	$p_0 e^{i\omega t}$	$p_l e^{i\omega t}$
Граничное условие	$Z_0 \dot{\xi}_0 = \Psi_0 - p_0$	$Z_l \dot{\xi}_l = p_l$

Вследствие периодического отражения в трубе в ней в положительном направлении от начала будет перемещаться сложная волна, у которой каждая составляющая отличается от других лишь начальной амплитудой и фазовой постоянной, зависящей от того, сколько раз волна прошла двойную длину. Все эти составляющие образуют ряд вида:

$$\psi_{\pm} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-(2mL \pm x)\tau} \cdot e^{-i\left(\frac{2m\omega l}{c} \pm \beta x\right)} \cdot e^{i\omega t}$$

и, очевидно, что, поскольку амплитуды и фазы всех составляющих следуют тому же закону при своем поступательном движении в трубе, они могут быть просуммированы и объединены в одно выражение такого же вида, именно:

$$x_+ = A' e^{-(\alpha + i\beta)x} e^{i\omega t},$$

причем постоянная A' является собирательной для ряда коэффициентов, каждый из которых отличается от предыдущего постоянными угловыми множителями. Поступая аналогичным образом с системой отраженных волн, перемещающихся в отрицательном направлении от точки $x = l$, имеем

$$u = -B^1 e^{-(\gamma + i\beta)x} e^{i\omega t}.$$

Следовательно, скорость в любой точке трубы равна:

$$\dot{\xi}(x) = \dot{\xi}_+ + \dot{\xi}_- = (A'e^{-(\alpha + i\beta)x} - B'e^{(\alpha + i\beta)x})e^{i\omega t}. \quad (125)$$

Избыточное давление p равно $\pm c\rho\dot{\xi}$, причем знак плюс относится к волне, распространяющейся в положительном направлении, а знак минус к отраженной волне, как и в предыдущем параграфе. Таким образом

$$p = \rho c (A'e^{-(\alpha + i\beta)x} + B'e^{(\alpha + i\beta)x})e^{i\omega t} \quad (126)$$

или, если рассматривать только максимальные значения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \\ \text{при } x = l \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{\xi}_0 = A' - B', \quad p_0 = \rho c (A' + B') \\ \dot{\xi}_l = A'e^{-(\alpha + i\beta)l} - B'e^{(\alpha + i\beta)l} \\ p_l = \rho c (A'e^{-(\alpha + i\beta)l} + B'e^{(\alpha + i\beta)l}) \end{array} \quad (127)$$

Учитывая граничные условия для давления на поверхности поршней и полагая $L = e^{-(\alpha + i\beta)l}$, имеем

$$\left. \begin{array}{l} Z_0 (A' - B') + \rho c (A' + B') = \Psi_0 \\ Z_l (A'L - \frac{B'}{L}) - \rho c (A'L + \frac{B'}{L}) = 0 \end{array} \right\} \quad (128)$$

Таким образом, вопрос сведен к задаче о двух связанных системах с двумя степенями свободы; решая уравнение (128) относительно постоянных A' и B' и подставляя найденные значения в (125) и (126), получаем

$$\left. \begin{array}{l} \text{и} \\ \text{где} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{\xi}(x) = [(Z_l + \rho c) e^{-(\alpha + i\beta)x} - L^2 (Z_l - \rho c) e^{(\alpha + i\beta)x}] \frac{\Psi_0}{D} e^{i\omega t} \\ p(x) = \rho c [(Z_l + \rho c) e^{-(\alpha + i\beta)x} + L^2 (Z_l - \rho c) e^{(\alpha + i\beta)x}] \frac{\Psi_0}{D} e^{i\omega t}, \\ L = e^{-(\alpha + i\beta)l} \end{array} \quad (129)$$

$$D = (Z_0 + \rho c)(Z_l + \rho c) - L^2 (Z_0 - \rho c)(Z_l - \rho c) = (Z_0 Z_l + \rho^2 c^2) (1 - L^2) + \rho c (Z_0 + Z_l) (1 + L^2).$$

Отсюда можно сделать ряд выводов. Если движущий и движимый поршни соединены между собой электрически посредством усилителя так, что движение поршня в $x = l$ усиливается и сообщается снова движущему поршню, то получается „воющий“ („howling“) телефон. Задача эта интересна, но весьма сложна, так как включает детальный анализ корней уравнения $D = 0$, выраженных через Z_0 , Z_l и L , для нахождения собственных частот системы.

Теоретические соображения развиты Никольсом¹⁾ (H. W. Nichols Phys. Rev. X, 1917, p. 191); экспериментальные данные читатель может найти в книге Кеннели „Вибрационные приборы“ (Kenelli „Vibration Instruments“, глава XXIII). Подробный анализ задачи о „воющем“ телефоне приведен Флетчером (H. Fletcher) в статье в Bell System Tech. Jour. V, Jan. 1926.

¹⁾ Покойный Никольс (H. W. Nichols, 1886 — 1925), известный, главным образом, статьями по электродинамике, являлся также прекрасным работником и полезным критиком в области акустики. Он обладал отличным знакомством с классической теорией и часто применял ее к вопросам практики. Биографическая заметка была помещена в „Nature“, декабрь 19, 1925, стр. 909.

Если рассматривать теорию распространения волны по трубе при установившемся режиме, то приходится брать за основу „волновую систему передачи энергии Константиновско“, некоторые свойства которой весьма интересны и наглядны. Отметим те из них, которые являются особо важными.

Полагая в (129) $x = 0$, имеем для сопротивления в точке приложения силы ¹⁾

$$Z_{00} = \frac{\Psi_0}{|\dot{\xi}_0|_{\max}} = \frac{(Z_0 + \rho c)(Z_l + \rho c) - L^2(Z_0 - \rho c)(Z_l - \rho c)}{(Z_l + \rho c) - L^2(Z_l - \rho c)} \quad (130)$$

и также при $x = l$ приведенное сопротивление (в точке $x = l$ по отношению к силе, приложенной в $x = 0$) равно:

$$Z_{0l} = \frac{\Psi}{|\dot{\xi}_l|_{\max}} = \frac{D}{2\rho c L} = \left(\frac{Z_0 Z_l + \rho^2 c^2}{\rho c} \right) \left(\frac{L^{-1} - L}{2} \right) + (Z_0 + Z_l) \left(\frac{L^{-1} + L}{2} \right). \quad (131)$$

анализа этого уравнения предположим, что α мало, иначе говоря, что в трубе нет рассеяния вследствие трения. Тогда имеем

$$\frac{L^{-1} - L}{2} = \frac{e^{i\beta l} - e^{-i\beta l}}{2} = i \sin \beta l, \quad \frac{L^{-1} + L}{2} = \cos \beta l$$

и

$$Z_{0l} = \left(\frac{Z_0 Z_l + \rho^2 c^2}{\rho c} \right) i \sin \beta l + (Z_0 + Z_l) \cos \beta l. \quad (131a)$$

Для передачи максимальной мощности Z_0 и Z_l должны быть малы и свободны от реактивных составляющих, а также длина трубы и частота должны быть подобраны так, чтобы сама труба не добавляла реактивного сопротивления к полному сопротивлению, поэтому мы должны иметь

$$\sin \rho l = 0 \text{ и } \cos \rho l = \pm 1,$$

то есть

$$\beta l = k\pi \quad (k \text{ — любое целое число})$$

или, так как

$$\lambda f_0 = c \text{ и } \beta = \frac{\omega_0}{c},$$

$$l = k \frac{\lambda}{2}, \quad (132)$$

т. е. оба поршня находятся или точно в фазе, или противоположны по фазе в зависимости от того, четно k или нечетно.

При этом

$$Z_{0l} = (Z_0 + Z_l) (-1)^k \quad (133)$$

¹⁾ Если положить $Z_0 = 0$ и пренебречь рассеянием, то (130) получает вид

$$Z_{00} = \rho c \frac{Z_l \cos \beta l + i \rho c \sin \beta l}{\rho c \cos \beta l + i Z_l \sin \beta l}, \quad (288)$$

о чем будет еще упомянуто в § 56. Здесь читатель должен познакомиться с трактовкой Флемингом задачи о параллельных проводах в книге „Распространение электрических токов“, гл. III. Например (288) идентично уравнению Флеминга (61), стр. 19, при $\alpha = 0$. Интересно также сравнить (288) с выражением для сопротивления в точке приложения силы для рупора экспоненциальной формы, взяв отношение (229) к (228), § 46. См. также задачу 35 главы IV. В задачах, касающихся труб и рупоров, мы находим доказательства ценности метода сопротивлений при изучении акустических систем.

и, так как (130) при $\alpha = 0$ обращается в

$$Z_{00} = \frac{Z_0 Z_l + \rho^2 c^2 i \sin \beta l + \rho c (Z_0 + Z_l) \cos \beta l}{Z_l \cdot i \sin \beta l + \rho c \cos \beta l},$$

то

$$Z_{00} = (Z_0 + Z_l),$$

если

$$\cos \beta l = \pm 1. \quad (133a)$$

Закljučаем, что сопротивление поршня при $x = l$ как бы перенесено в точку приложения силы, где оно складывается с сопротивлением непосредственно приводимого в движение поршня. Это справедливо при k как четном, так и нечетном, т. е. для поршней, находящихся в фазе или противоположных по фазе. Упругая среда осуществляет в этом идеальном случае между обоими поршнями связь без массы и без трения, бесконечной упругости; это — идеальное условие для волновой передачи мощности.

Получаемый эффект при частоте, соответствующей резонансной частоте трубы, будет зависеть от уменьшения показателя затухания $\alpha = \frac{R_1}{2\rho c}$.

Для данной частоты и среды с известной вязкостью последнее достигается применением возможно более короткой трубы и заставляет пользоваться трубой длиной в полволны. В системе Константинеско все же часто необходимы длинные трубки с боковыми отростками, расположенными вдоль трубы; в них переменное давление в трубе приводит в движение несколько отдельных поршней.

Очевидно, что в этом случае должны быть приняты во внимание высшие гармоники трубы и что боковые отверстия следует располагать одно от другого на расстоянии целого числа полуволин.

Подробности о системе Константинеско интересующиеся найдут у Драйсделя.

В известном опыте Кундта с трубой Z_l равно бесконечности, и Z_0 неизвестно, причем граничное условие вначале заключается просто в том, что имеет место заданное движение $\xi_0 e^{i\omega t}$, которое получается вследствие колебаний конца металлического стержня, находящегося в резонансе. Поэтому уравнение (130) здесь применено быть не может. Как и в (125), положим (пренебрегая рассеянием в воздушном столбе)

$$\xi(x) = (Ae^{-i\beta x} - Be^{i\beta x}) e^{i\omega t}, \quad (134)$$

причем нам известно, что

$$\xi(0) = \xi_0 e^{i\omega t}; \quad \xi(l) = 0.$$

Определяя A и B и подставляя, имеем

$$\xi(x) = \frac{\xi_0 (e^{-i\beta x} - e^{i\beta x} e^{-2i\beta l})}{(1 - e^{-2i\beta l})} e^{i\omega t}$$

или

$$\xi(x) = \frac{\xi_0}{\sin \beta l} \sin \beta (l - x) e^{i\omega t}. \quad (135)$$

Таким образом амплитуда становится ненормально большой, если $\sin \frac{\omega l}{c} = 0$ или $l = \frac{k\lambda}{2}$, где k — целое число" (Лемб, § 62).

Условие резонанса трубы то же самое, что и в схеме Константиновско; следует, однако, заметить, что явления в трубе Кундта несколько отличны.

В опыте Кундта получаются стоячие волны, кинематика которых идентична с кинематикой натянутой струны § 28; в схеме передачи энергии не вся энергия отражается от удаленного конца вследствие влияния находящегося там поршня.

В этом последнем случае в трубе получаются сложные условия существования стоячих волн и условий волновой передачи, если Z_0 и Z_l не вполне согласованы; картина стоячих волн исчезает, когда Z_0 и Z_l не содержат реактивных составляющих или содержат такие реактивные составляющие, которые, налагаясь, делают сумму $Z_0 + Z_l$ чисто активным сопротивлением.

§ 33. Приближенная теория резонанса в трубах.

Разберем теперь некоторые свойства органных труб, которые для упрощения теории являются трубами или с широко открытыми или наглухо закрытыми концами. В последнем случае $Z_0 = Z_l = \infty$. В этом случае опять-таки уравнение (130) не может быть применено; оно просто констатирует, если пренебречь величиной ρc , как относительно малой, тот несомненный (но и бесполезный) факт, что $Z_{00} = Z_0$ является весьма большой величиной. Так как труба с закрытыми концами не может быть приведена в действие извне, то интерес представляет только решение для установившегося режима и это предоставлено читателю в качестве задачи в конце этой главы.

Если один или оба конца трубы открыты, то решения, характеризующие устанавливающийся режим, можно получить, беря за основу теорию установившегося состояния (уравнение 129) и полагая сопротивления поршней на открытых концах ничтожно малыми. Разберем этот случай как интересный вариант обычного метода, применяемого в учебниках.

Сопротивление излучения источника с поверхностью S (§ 24), выраженное через частоту, было найдено ранее и составляло

$$b_1 = \frac{\rho \omega^2 S^2}{4 \pi c}.$$

Это уравнение появится позже в этой главе под (175).

Если положить $S = 1$, то b_1 становится для всех средних значений частоты значительно меньше, чем ρc , сопротивление излучения для плоских волн, поэтому, пренебрегая b_1 мы не впадаем в большую ошибку. Но это не все; на открытом конце имеется инерционная составляющая сопротивления; ее действие состоит в том, что длина трубы как бы увеличивается на некоторую небольшую величину. Изучение этого довольно сложного вопроса мы отложим до главы IV; в настоящий же момент примем, что ρc гораздо больше, чем сопротивление открытого конца, и посмотрим, что мы при этом получаем.

Простейший случай будет, когда $Z_0 = 0$ (т. е. $Z_0 < \rho c$) и Z_l весьма велико. Делая соответствующие изменения в уравнении (129) и пренебрегая рассеянием, получаем для скорости

$$\dot{\xi}(x) = \frac{Z_l (e^{-i\beta x} - L^2 e^{i\beta x}) \Psi_0 e^{i\omega t}}{\rho c Z_l (1 + L^2)} \quad (136)$$

или

$$\dot{\xi}(x) = \frac{[e^{-i\beta x} e^{i\beta l} - e^{-i\beta l} e^{i\beta x}] \Psi_0 e^{i\omega t}}{\rho c (e^{i\beta l} + e^{-i\beta l})}, \quad (136a)$$

$$\text{откуда} \quad \dot{\xi}(0) = \frac{i}{\rho c} \frac{\sin \beta l}{\cos \beta l} \Psi e^{i\omega t} \quad (136b)$$

Таким образом, сопротивление в точке возбуждения является чисто реактивным:

$$(-i \rho c \operatorname{ctg} \beta l),$$

и собственные частоты можно найти, приравнивая это выражение нулю.

Применяя это условие, имеем

$$\cos \beta l = 0,$$

откуда

$$\beta l = k \frac{\pi}{2} \quad (k = 1, 3, 5 \dots),$$

т. е.

$$\omega_k = \frac{k c \pi}{2 l} \quad (137)$$

или, так как

$$c = \lambda f_1, \quad l = \frac{k \lambda}{4}.$$

При частотах, при которых длина трубы равна нечетному числу волны, скорость, очевидно, весьма велика. Так как знаменатель (136a) не является функцией x , то можно считать, что числитель этого выражения указывает распределение скорости по трубе при условиях резонанса. Тогда имеем $e^{i\beta l} = i$ и $e^{-i\beta l} = -i$ и, следовательно:

$$\dot{\xi}(x) = \dot{\xi}_0 \cos \beta x \cdot e^{i\omega t} = \dot{\xi}_0 \cos \frac{k\pi x}{2l} e^{i\omega_k t}, \quad (138)$$

где $\dot{\xi}_0$ есть максимальное значение $\dot{\xi}$ при $x=0$. Для нахождения распределения давления по трубе нельзя пользоваться соотношением $\delta p = \pm c \rho \dot{\xi}$, ввиду того, что для получения $\dot{\xi}(x)$ в (138) были взяты обе волны как движущаяся в положительном, так и в отрицательном, направлениях. Всегда, однако, имеет место

$$p = \chi^1 s = -\chi^1 \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} = -c^2 \rho \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x}, \quad (105a) \text{ и } (113)$$

независимо от того, имеется ли система стоячих или бегущих волн.

Таким образом, так как $\dot{\xi}(x) = \frac{\dot{\xi}}{i\omega}$,

$$p = -c^2 \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dot{\xi}_0}{i\omega} \cos \beta x \right) e^{i\omega t} = -i \rho c \dot{\xi}_0 \sin \beta x \cdot e^{i\omega_k t} \quad (139)$$

и оказывается, что давление равно нулю в точке $x=0$ и имеет максимум при $x=l$; распределение давления в системе стоячих волн является „дополнительным“ к распределению скорости вдоль трубы. Более того, максимум давления расходится по фазе на четверть периода с максимумами скорости; однако, давление и амплитуда находятся в фазе во времени. Все эти соотношения справедливы вообще в отношении явления стоячих волн.

Для трубы, открытой с обоих концов ($Z_0 = Z_l = 0$), скорость, согласно уравнения (129), если пренебречь рассеянием, равна:

$$\dot{\xi}(x) = \frac{\rho c (e^{-i\beta x} + L^2 e^{i\beta x}) \cdot \Psi_0 e^{i\omega t}}{\rho^2 c^2 (1 - L^2)} \quad (140)$$

или

$$\xi(x) = \frac{(e^{-i\beta x} e^{i\beta l} + e^{i\beta x} e^{-i\beta l})}{\rho c (e^{i\beta l} - e^{-i\beta l})} \Psi_0 e^{i\omega t}, \quad (140a)$$

откуда

$$\xi(0) = \frac{\cos \beta l}{i\rho c \sin \beta l} \Psi_0 e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad \xi(l) = \frac{\Psi_0 e^{i\omega t}}{i\rho c \sin \beta l}. \quad (140b)$$

Сопротивление в точке возбуждения теперь равно $i\rho c \operatorname{tg} \beta l$, и собственные частоты определяются из условий:

$$\beta l = k\pi, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{или} \quad l = \frac{k\lambda}{2}, \quad (141)$$

результат, аналогичный полученному для „открытой“ трубки более прямым путем. Распределение скорости и давления в трубке может быть найдено способом, уже примененным для случая трубы, закрытой с одного конца, причем придем к уравнениям, аналогичным (138) и (139); последнее предоставляется проделать читателю. На этом мы заканчиваем изучение механизма резонанса в трубах¹⁾.

Для точного учета явлений в трубах следовало бы включить сюда явление рассеяние (диссипации); однако, на найденные значения давления и скорости в системах стоячих волн последнее обстоятельство не влияет слишком сильно.

§ 34. Общее рассмотрение физических факторов, влияющих на распространение.

Прежде чем идти дальше, рассмотрим еще раз некоторые физические факторы, влияющие на распространение. Разобрать их можно только в самых общих чертах; имеется довольно полная математическая теория данного вопроса, однако, она слишком обширна и сложна для элементарного курса.

Сначала рассмотрим поглощение (абсорбцию): оно может быть двух родов. Если оно происходит от резонанса, то оно является избирательным поглощением; теорией обратных воздействий, резонирующих систем на звуковые волны мы сейчас заниматься не будем. Подобного рода задач существует множество и правильнее будет отнести их к задачам об излучении. Мы имеем в виду разобрать здесь поглощение вследствие трения в среде, приводящее к затуханию движущейся волны после прохождения ею известного пути в среде. Это поглощение не избирательно за исключением случая, когда „постоянные“ среды несколько меняются с частотой; о нем упоминалось, когда речь шла о распространении волн сжатия в тонком демпфирующем слое микрофона с воздушным демпфером (§ 11, уравнение 37).

Применим теорию рассеяния в звукопередаче в звукопроводах капиллярных размеров. Решение этой задачи дано в приложении А; оказывается, что для весьма узких труб применим закон Пуазеля (Poiseuille)

¹⁾ Поведение цилиндрической трубки с боковыми отверстиями разобрано теоретически В. Штейнгаузеном (W. Steinhäuser, Ann. d. Phys., 48, 1915, p. 693) и экспериментально Ратцем (E. Ratz, Ann. d. Phys., 77, 1925, p. 195). Попутно Ратц определяет концевую поправку для бесфланцевой трубки, именно $\alpha = 0,78 r$; эта цифра является средней между цифрами, проводимыми Рэлеем для фланцевой и бесфланцевой трубы (см. § 43, глава IV). У Рэлая (II, § 318) рассматривается явление поглощения энергии звуковых волн, когда они, распространяясь по трубе, проходят боковое отверстие, ведущее к резонатору. Интересующиеся этого рода явлениями могут обратиться к трем недавно вышедшим статьям Стюарта (G. W. Stewart), о влиянии ответвлений в трубопроводе на звукопередачу (см. Phys. Rev., 25, 1925, стр. 688; там же 27, 1926, стр. 487 и стр. 494).

и что инерцией среды в трубе можно пренебречь по сравнению с вязкостью, поскольку дело идет о влиянии на распространение. Уравнение движения может быть написано в виде:

$$\xi - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\kappa'}{R} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ; \quad R = \frac{8\mu}{r^2}, \quad (K')$$

его решение показывает, что волны, распространяющиеся (вернее диффундирующие) внутри капиллярной трубки, затухают очень сильно.

Естественно искать в этих явлениях объяснение поглощения звука пористыми телами. Поры или щели в поглощающем материале наполнены воздухом и поэтому для падающей звуковой волны представляют сплошное поле открытых концов узких трубопроводов, внутри которых рассеяние вследствие вязкости весьма велико.

Для создания хорошего поглощающего материала надо соблюсти два условия: во-первых, иметь материал, сопротивление излучения которого (для предотвращения отражения) возможно приближалось бы к сопротивлению излучения прилежащей среды, из которой звук должен быть поглощен, и, во-вторых, необходимо обеспечить наличие в материале возможно большего трения, чтобы заглушить проходящую волну. Если, например, взять неплотно уложенный войлок, то, несмотря на то, что его сопротивление излучения близко подходит к сопротивлению излучения воздуха (вследствие содержания большого процента воздуха), все же воздушные каналы в материале не настолько узки, чтобы вызвать достаточную вязкость, поэтому для заглушения проходящей волны требуется толстый слой материала. При чересчур плотной укладке получаем большую силу трения, однако, теперь войлок обладает слишком большой инерцией, сопротивление излучения его по сравнению с воздухом слишком велико, поэтому звуковые волны отражаются, не проникая совсем в толщу материала. Вывод о требованиях к хорошему поглотителю ясен сам собой.

Более детально мы будем разбирать теорию поглощающих материалов в главе V (§§ 51, 52).

Хотя мы и не намереваемся изучать отдельные материалы, все же следует упомянуть об изящном и эффективном методе, предложенном Венте (E. C. Wente) для испытания поглощающих свойств различных сортов войлока. Короткая трубка (достаточного диаметра для уменьшения внутреннего трения) возбуждалась на одном конце телефоном; другой конец замыкался диском из поглощающего материала, позади которого помещался еще жесткий диск. Условия опыта в точности те же, что и в рассмотренной нами в § 32 схеме распространения волны; картина стоячей волны (если частота подогнана к резонансу трубы) стремится исчезнуть и тем в большей мере, чем больше энергии, излученной телефоном, поглощается на отдаленном конце трубы. (Картина стоячих волн определяется малой измерительной трубкой, присоединенной к звукоизмерительному прибору, например, конденсаторному микрофону). Опыт может вестись различным образом; при фиксированной длине трубы при резонансе можно определить отношение между максимумами и минимумами давления в системе стоячих волн и коэффициентом отражения поглощающей поверхности, следуя идее Тейлора (H. O. Taylor, *Phys. Rev.*, II, 1913, стр. 270). (Другой вариант опыта приведен в задаче 41, стр. 226). Однако, на практике Венте предпочитает измерять сопротивление трубы в точке возбуждения при изменении длины трубы — оно будет максимальным, когда действующая длина трубы будет равна числу полуволн, и минимальным, если эта установка длины будет изменена на одну четверть длины волны. По этим

измеренным сопротивлениям можно вычислить коэффициент поглощения слоя.

Рассмотрим теперь более слабые виды рассеяния в безграничной среде, имеющей свойство ослаблять звуковые волны. Под ослабляющими влияниями будем понимать все, что способно превращать правильное колебательное движение частиц среды в беспорядочное или статистическое движение, связанное с тепловым состоянием среды. Эти влияния особенно сильны в явлениях большого масштаба, как, например, распространение импульса давления, возникшего при отдаленном взрыве; несмотря на то, что местные воздействия на волну отклонений от идеальных условий в той или иной части пространства могут быть незначительны, все же суммарный накопившийся эффект при прохождении волны от начала до конца может быть значителен.

Типичным ослабляющим фактором является вязкость, влияние которой сказывается и при отсутствии ограничивающих поверхностей. Никакое вещество не может расширяться или сжиматься в одном измерении без рассеяния; подходя к вопросу иначе, можно сказать, что звуковые волны не могут распространяться ни в одной среде, сколь угодно легкой и упругой, без того, чтобы в некоторой степени не поглощаться. Можно доказать (Лемб, § 64), что общее уравнение распространения плоской волны в газовой среде имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \kappa' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \mu - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (142)$$

где μ — коэффициент вязкости. Это уравнение напоминает (122); размерности членов, учитывающих трение, совпадают в обоих случаях и ход решения в обоих случаях одинаков. Уравнения (142) и (122) становятся идентичными, если написать

$$R_1 \dot{\xi} = -\frac{4}{3} \mu \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x^2} = \frac{4}{3} \frac{\mu \omega^2 \xi}{c^2}, \quad (143)$$

что можно сделать, так как при поступательном движении волны

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2 \xi}{c^2}.$$

Тогда получаем решение (142) в виде:

$$\xi = A e^{-\alpha x} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)} \quad \text{см. (124)} \quad (144)$$

и показатель затухания равен:

$$\alpha = \frac{R_1}{2\rho c} = \frac{2\mu\omega^2}{3\rho c^3} = \frac{2}{3} \frac{2\mu k^2}{\rho c}. \quad (144a)$$

Коэффициент $\frac{\mu}{\rho} = \gamma$ имеет специальное название. Максвелл назвал его кинематическим коэффициентом вязкости. Для воздуха при нормальных температуре и давлении он равен приблизительно $0,132 \text{ см}^2/\text{сек}$. Показатель затухания мал, если судить по явлениям, наблюдаемым в малом масштабе в лаборатории; он, однако, быстро возрастает с повышением частоты. Так, сигналы сирены, если их слушать на большом расстоянии, приходят с относительно выделенными основными тонами за счет ослабления составляющих высших частот. (Этот эффект усугубля-

ется „вихревым строением“ атмосферы, также ведущим к ослаблению звуковых волн ¹⁾).

Уравнение (142) выведено Стоксом для изотропной и неограниченной с боков среды. Для газа $\kappa^1 = \nu\rho$, т. е. равно действующему объемному модулю при быстрых колебаниях. В случае продольных волн в сплошном стержне должно быть заменено модулем Юнга (Лемб, § 43) и в члене, характеризующем рассеяние, коэффициент должен быть умножен на $(1 + \sigma)$, где σ — Пуассоново отношение бокового сжатия к продольному растяжению. Вывод уравнения в описанной форме дан Квимби (S. L. Quimby, Phys. Rev., 25, 1925., p. 558).

В связи с этим интересен неопубликованный опыт Бриджмена и Трюблуда (Bridgman and Trueblood, 1918). Они задались целью определить фазовую скорость волн сжатия, возбуждаемых в столбике резины, когда один его конец был присоединен нормально к колеблющейся диафрагме телефона. Затухание вследствие вязкости в резине происходит весьма быстро, и волны, отраженной от удаленного конца, не наблюдалось. Волна исследовалась посредством легкого микрофона, прикрепляемого в различных точках; оказалось, что по фазе колебаний испытательного микрофона можно было определить длину волны, а следовательно, и скорость звука в резине: она получилась для некоторого сорта равной 80 м в секунду. Теоретически возможно, наблюдая ослабление интенсивности с увеличением расстояния вдоль столба резины, определить показатель затухания α и по нему вычислить коэффициент вязкости резины при частоте возбуждения системы. К сожалению, экспериментальные данные не позволили проделать этого сколько-нибудь точно; они, однако, показали изменение вязкости от сорта к сорту и общее явление уменьшения вязкости с увеличением частоты. Последнее находится качественно в согласии со взглядами Квимби (Quimby, loc. cit.), явившимися результатом исследования вязкости стекла и металлов под действием быстропеременных усилий, сообщаемых продольными волнами. Имеются все основания считать, что действующая вязкость вещества меняется с частотой и что вязкость при возбуждении высокой частотой будет сильно отличаться от этой же константы, определенной статически. Квимби, например, нашел коэффициент вязкости для стекла, алюминия и меди порядка 10^8 при частотах порядка 40 000 герц, в то время как те же константы, определенные статическим путем, оказались порядка 10^8 . Метод Квимби основывается на явлениях стоячих волн в стержнях, приводимых в продольные колебания, и сам по себе является интересным применением теории акустических систем ²⁾. Теплопроводность (т. е. отступление слоевых элементов среды от адиабатического закона расширения и сжатия) также является причиной ослабления. Это было исследовано Кирхгофом (Kirchhoff) (см. Лемб, § 65), который нашел, что эффект ослабления сравним с обусловливаемой вязкостью.

Если звуковые волны имеют конечную (т. е. большую) амплитуду и, таким образом, отступают от нашего общего условия „малых колебаний“, то ослабление достигает заметных значений. Волновая скорость зависит от амплитуды; фактически среда не подчиняется закону Гука. В классической теории (Лемб, § 63) доказывается, что „сгущения“ распростра-

¹⁾ L. V. King, Phil. Trans., 218 A, стр. 211, 1919 и G. I. Taylor, ibid., 215 A, стр. 1, 1915.

²⁾ Статья дает также интересный разбор расхождений между теорией Стокса и наблюдаемыми фактами, расхождений, увеличивающихся при весьма больших коэффициентах вязкости или смещениях. Далее специальный интерес представляет вопрос о пьезо-электрической движущей системе в связи с другими применениями пьезо-электричества, указываемыми в приложении В. Вязкость при переменных усилиях разбирается также у Boyle (Trans. Roy. Soc. Canada, Ser. III, 16, 1922, стр. 223) „Волны сжатия в металлах“.

ются с несколько большей скоростью, чем „разрежения“; первые стремятся догнать последние и неизбежно искажение формы волны. Этот случай весьма важен для лиц, работающих в области распространения мощных звуков, и в связи с этим читателя может интересовать недавняя экспериментальная работа М. D. Hart'a (Proc. Roy. Society, 105 A, стр. 80, 1924). Очевидно, что если сгущения будут громоздиться одно на другое, то в конце концов достигнем положения, когда место части первоначальной звуковой энергии займет беспорядочное движение.

Ко всем перечисленным явлениям в практических случаях прибавляются еще случайности метеорологического характера, как, например, рефракция вследствие меняющихся температурных градиентов в атмосфере или переменных воздушных течений.

Подобные искажающие факторы встречаются и в подводной сигнализации, хотя и не проявляются в такой сильной степени; следует отметить, что потери в воде (зависящие от кинематической вязкости) меньше, чем в воздухе.

Несомненно благоприятно, что обычная телефония мало пользуется акустическими явлениями большого масштаба ¹⁾.

§ 35. Общая теория звуковых волн в трех измерениях.

В большинстве проблем звукового излучения доминирующую роль играет „расхождение“ (divergence); соответственно теорию, которой мы пользовались для плоских волн, необходимо расширить, чтобы охватить ею вопросы движения в трех измерениях. Вместо взятого нами (§ 30) тонкого слоя среды рассмотрим теперь элемент объема $\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$.

Сила, действующая в направлении оси x , вследствие избыточного давления на этот элемент равна:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \cdot dy dz$$

и, так как сила инерции равна $\rho \ddot{\xi} \cdot dx dy dz$, имеем (уравнение 107)

$$\rho \ddot{\xi} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (145)$$

Это есть движение вдоль оси x . Если η и ζ суть соответственно смещения в направлении y и z , то получаем систему уравнений

$$\rho \ddot{\xi} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \ddot{\eta} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \ddot{\zeta} = -\frac{\partial p}{\partial z}. \quad (145a)$$

В этих уравнениях p представляет избыточное давление, поэтому $p = \chi' s$ (уравнение 105a); можно также положить $c^2 = \frac{\chi'}{\rho}$, так что система (145a) заменяется следующей:

$$\ddot{\xi} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \ddot{\eta} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial y}, \quad \ddot{\zeta} = -c^2 \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (145b)$$

В подобном случае иметь дело с тремя отдельными уравнениями движения не экономично так же, как и применять $3m$ уравнений в случае обыкновенного колебания системы с m степенями свободы (§ 20).

¹⁾ Читателя, специально интересующегося звуковой сигнализацией в воздухе, метеорологическими случайностями и т. д., мы отсылаем к монографии М. D. Hart and W. Whately Smith „Principles of Sound Signalling“, London, 1925 (рецензия в „Nature“ 116, декабрь 1925).

Для упрощения теории найдем такую функцию, из которой можно определить все три величины ξ, η, ζ или их производные по времени. Такая функция существует для всех случаев движения жидкости, когда отсутствует циркуляция (т. е. вихри и водовороты), а это будет иметь место, если частицы среды в процессе передачи звуковых волн испытывают лишь малые колебания, функция, которую мы ищем, есть „потенциал скорости“, обозначаемый φ и связанный¹⁾ со скоростями и любой гидродинамической задаче следующим образом:

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \dot{\zeta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (146)$$

Этой основной идеей мы опять-таки обязаны Лагранжу. Определение, обратное определению (146), будет

$$\varphi = -\int (\dot{\xi} dx + \dot{\eta} dy + \dot{\zeta} dz), \quad (146a)$$

выражение, аналогичное линейному интегралу сил, которым пользуются при вычислении совершенной работы для получения ньютоновской потенциальной функции в задачах механики; однако, в настоящий момент (146a) не так полезно для нас, как (146).

Функция φ есть скаляр так же, как потенциальная функция механики есть скаляр; однако (как и у V), ее производные по направлениям суть векторы. Размерность φ есть $L^2 T^{-1}$.

Чтобы получить φ , проинтегрируем сначала (145b)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -c^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t s dt + \dot{\xi}_0, & \dot{\eta} &= -c^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_0^t s dt + \dot{\eta}_0, \\ \dot{\zeta} &= -c^2 \frac{\partial}{\partial z} \int_0^t s dt + \dot{\zeta}_0, \end{aligned} \quad (147)$$

причем постоянные $\dot{\xi}_0, \dot{\eta}_0, \dot{\zeta}_0$ суть начальные компоненты скорости при $t=0$. Если положить $\dot{\xi}_0 = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}$ и т. д., то, сравнивая (147) и (146), имеем

$$\varphi = c^2 \int_0^t s dt + \varphi_0. \quad (148)$$

Это и есть искомая функция — потенциал скорости. Выражение (148) дает возможность вывести сразу важную в ряде случаев зависимость:

$$\dot{\varphi} = c^2 s \equiv \frac{p}{\rho}. \quad (149)$$

¹⁾ Читатель заметит, что мы всюду придерживаемся знака „минус“ в таких уравнениях как

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{R} \frac{dp}{dr} \text{ (36); } \rho \dot{\xi} = -\frac{\partial p}{\partial x} \text{ (145a); } \xi = -\frac{d\varphi}{dx} \quad (146)$$

Это совпадает с принятыми у Лемба, но противоречит обозначениям Рэлея. Автор считает, что смысл имеет именно знак (—), так как собственные движения или потоки, имеющие место в любом силовом поле, направлены от точек с более высоким давлением или более высоким потенциалом к точкам с низшим давлением или потенциалом; другими словами, производная по направлению, или градиент, должна быть отрицательна по отношению к соответствующему движению. Для дальнейшего обоснования этого положения могут быть полезными замечаниями Лемба в предисловии к его „Гидродинамике“.

Одно из применений выражения (149) следует непосредственно. Мы имели уравнение непрерывности (106, 106a) для одного измерения; распространяя эту идею на три измерения, пишем

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \quad (150)$$

Подставляя $\frac{\varphi}{c^2}$ вместо s и $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ вместо ξ и также для остальных двух скоростей имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (151)$$

или, применяя обычное сокращение $\nabla^2 \varphi$ для выражения в скобках:

$$\ddot{\varphi} - c^2 \nabla^2 \varphi = 0, \quad (151a)$$

что представляет собою общее уравнение распространения звуковых волн в трехмерном пространстве.

Обычный ход решения задач в трех измерениях следующий: сначала находим решение (151a), удовлетворяющее граничным условиям; зная φ , можем определить избыточное давление p , уплотнение s , и из (149) и (146) любую другую интересующую нас переменную.

§ 36. Сферические звуковые волны; точечный источник.

Разберем теперь некоторые из простейших свойств сферических звуковых волн. В сферических координатах можно написать

$$x = r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta$$

и

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (152)$$

Если по отношению к началу имеется сферическая симметрия (случай малого источника звука в точке $x=0, y=0, z=0$), то φ является функцией только r и t , и (151a) преобразуется в

$$\ddot{\varphi} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (153)$$

или, если выбрать новую функцию $\Phi = r \cdot \varphi$, то вместо (153) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi). \quad (153a)$$

Это уравнение кинематически эквивалентно (108), если положить $\theta = (r \cdot \varphi)$ и, следовательно, его решение должно иметь вид:

$$\varphi = \frac{A'}{r} f(ct - r) + \frac{B'}{r} F(ct + r), \quad (154)$$

причем первый член представляет сферическую волну, радиально расходящуюся от источника, а второй — сферическую волну в обратном направлении, так же, как и в уравнениях (108) и (109) для плоских волн. A и B суть произвольные постоянные, смысл которых нужно раскрыть. Сразу очевидно, что все выражения для энергии волны будут содержать φ^2 или

$\frac{A^2}{r^2}$ и что, таким образом, плотность энергии в какой-либо точке на расстоянии r от источника звука будет меняться по закону $\frac{1}{r^2}$; в то же время поток энергии сквозь любую сферическую поверхность, окружающую источник, должен быть, согласно принципу сохранения энергии, постоянным, не зависящим от r .

Обращая внимание только на расходящуюся волну, найдем в качестве первого соотношения зависимости между скоростью частиц $\dot{\xi}(r)$ и избыточным давлением.

Так как

$$\dot{\xi}(r) = - \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

и

$$\left. \begin{aligned} p(r) &= \rho \dot{\varphi} \quad (149), \\ \dot{\xi}(r) &= + \frac{A'}{r} f'(ct - r) + \frac{A'}{r^2} f(ct - r), \\ p(r) &= \frac{\rho c A'}{r} f'(ct - r), \end{aligned} \right\} \quad (155)$$

где $f'(ct - r)$ означает производную от f по $(ct - r)$. На значительных расстояниях от источника второй член первого уравнения становится малым по сравнению с первым членом, так что для практических случаев

$$p = \rho c \dot{\xi} = R \dot{\xi} \quad (r \text{ велико}). \quad (156)$$

Точно так же, поскольку для любого малого элемента объема $\delta r \cdot r \delta \theta \cdot r \sin \theta \delta \varphi$ мы должны иметь $p s = k'$ (p и s меняются только с изменением r), то

$$cs = \dot{\xi} \text{ и } p = \frac{\rho'}{c} \dot{\xi}. \quad (156a)$$

Это все те же соотношения, что и найденные нами для плоских волн; единственной разницей между обоими случаями (если r не слишком мало) является то, что вместо $\dot{\xi}$ или p для плоской волны, для сферической ту же роль играет соответственно $(r\dot{\xi})$ и (p) . Это лишь обуславливает уменьшение плотности энергии вследствие расхождения. Можно показать также, что максимальные значения кинетической и потенциальной энергии в любой точке равны между собой, как и в случае плоских волн; здесь могут также быть применены все замечания относительно энергии и фазы, которые были сделаны в связи с уравнением (112a) в § 31. Особенно интересны условия у источника. Пусть жидкость вводится периодически так, что

$$\varphi = \frac{A'}{r} f(ct - r) \equiv \frac{A'}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right); \quad (154a)$$

тогда

$$\dot{\xi}(r) = - \frac{A' \omega}{rc} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{A'}{r^2} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad (155a)$$

и полный поток (или скорость протекания жидкости) сквозь сферическую поверхность радиуса r равен:

$$4\pi r^2 \dot{\xi}(r) = - \frac{4\pi A' \omega}{c} r \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + 4\pi A' \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (157)$$

Пусть теперь r_0 — радиус источника, который мы можем представлять себе в виде весьма малой сферы. Тогда, если $\dot{\xi}(r_0) = \dot{\xi}_0 \cos \omega t$ и если положить

$$(4\pi r_0^2 \dot{\xi}_0) \cos \omega t = A \cos \omega t, \quad (158)$$

то в пределе при $r \doteq r_0 \doteq 0$ имеем, согласно (157)

$$A \cos \omega t = 4\pi A' \cos \omega t. \quad (159)$$

Величина $A = 4\pi r_0^2 \cdot \dot{\xi}_0$ есть максимальный поток у источника и называется „напряженностью источника“. Таким образом, мы определили постоянную A' уравнения (154а) и можем написать для потенциала скорости в любой точке среды, вызываемого малым уединенным источником напряженности A с периодичностью, определяемой $\cos \omega t$:

$$\dot{\varphi} = \frac{A}{4\pi r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) = \frac{A}{4\pi r} \cos (\omega t - kr). \quad (160)$$

Часто применяя это выражение, мы будем обращать внимание не столько на точную форму источника, как на его размеры. Если форма источника неправильна или плоска (например, одна сторона поршня), то важно, чтобы размеры источника были малы по сравнению с длиной волны, иначе (160) не будет применимо вследствие отсутствия сферического расхождения от источника. Следует, однако, заметить, что во многих случаях, когда явно не имеется сферического расхождения от источника в целом, можно применить выражение, аналогичное (160) к отдельным элементам источника, и затем путем интегрирования получить потенциал скорости, создаваемый всем источником в любой точке поля.

Мощность системы звуковых волн, исходящих от простого источника, должна быть одинакова на любой сферической поверхности, окружающей источник. Ее можно, очевидно, получить как произведение потока на давление для каждой такой поверхности. Из (160) для скорости и давления имеем

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{Ak}{4\pi r} \sin (\omega t - kr) + \frac{A}{4\pi r^2} \cos (\omega t - kr) \quad (161)$$

и

$$p = \rho \dot{\varphi} = -\frac{A\omega\rho}{4\pi r} \sin (\omega t - kr). \quad (161a)$$

поэтому мощность равна:

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 \cdot \dot{\xi} \cdot p &= \frac{A^2 k \omega \rho}{4\pi} \left[\sin^2 (\omega t - kr) - \frac{1}{kr} \sin (\omega t - kr) \cos (\omega t - kr) \right] = \\ &= \frac{\rho c \cdot A^2 k^2}{8\pi} \left[1 - \cos 2 (\omega t - kr) - \frac{1}{kr} \sin 2 (\omega t - kr) \right] \end{aligned} \quad (162)$$

и имеем для средней мощности источника

$$4\pi r^2 \cdot \left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \rho c \cdot \frac{A^2 k^2}{8\pi}, \quad (163)$$

где

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \dot{\xi} \cdot p = \rho c \cdot \frac{A^2 k^2}{32\pi^2 r^2}, \quad (164)$$

очевидно, является интенсивностью звука на поверхности сферы радиуса r , создаваемой источником с напряженностью A в начале.

В соответствии с уравнением (116) „плотность энергии“ в среде должна быть

$$E = \frac{1}{c} \left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \rho \frac{A^2 k^2}{32\pi^2 r^2}. \quad (165)$$

Это выражение, естественно, эквивалентно

$$E = \frac{1}{2} \kappa' s_{\max}^2 = \frac{1}{2} \frac{p_{\max}^2}{\kappa'}, \quad (166)$$

выведенному для плоских волн; поэтому для интенсивности снова получаем полезную формулу

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{1}{2} \frac{p_{\max}^2}{\rho c}, \quad (164a)$$

аналогичную формуле (116) для плоских волн.

§ 37. Пульсирующая сфера как генератор звука.

Наиболее интересной и поучительной задачей, к которой можно непосредственно приложить вышеизложенную теорию, является задача определения реакций, испытываемых сферой конечного радиуса, служащей генератором звука в неограниченной среде. Поскольку здесь мы имеем дело не с точечным источником, мы не имеем права пренебречь первым членом в выражении для скорости частиц (155a) и это, как будет видно из дальнейшего, является существенной особенностью данной задачи. В процессе решения для сокращения выкладок будем пользоваться комплексными величинами.

Первое граничное условие состоит в том, что при $r = r_0$ (радиусу сферы) скорость (ее вещественная составляющая) должна равняться:

$$\dot{\xi}(r_0) = \dot{\xi}_0 e^{i\omega t}; \quad (167)$$

поэтому решение дифференциального уравнения (153a) только для расходящейся волны следует искать в форме

$$\varphi = \frac{A'}{r} e^{i[\omega t - k(r - r_0)]}. \quad (168)$$

Второе граничное условие, именно, что скорость в бесконечности должна обращаться в нуль, очевидно удовлетворяется. Из (168) имеем для скорости на поверхности пульсирующей сферы

$$\dot{\xi}(r_0) = - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = A' \frac{(1 + ikr_0)}{r_0^2} e^{i\omega t}. \quad (169)$$

Это выражение должно быть идентично с (167), поэтому, сравнивая коэффициенты, имеем

$$A' = \frac{r_0^2}{1 + ikr} \dot{\xi}_0 = \frac{r_0^2 (1 - ikr_0)}{1 + k^2 r_0^2} \dot{\xi}_0, \quad (170)$$

откуда потенциал скорости равен:

$$\varphi = \frac{r_0^2 (1 - ikr_0) \dot{\xi}_0}{r (1 + k^2 r_0^2)} e^{i[\omega t - k(r - r_0)]}. \quad (171)$$

Отсюда определяем непосредственно избыточное давление на поверхности пульсирующей сферы

$$p(r_0) = \rho \dot{\varphi} \Big|_{r=r_0} = \frac{\rho \omega r_0 (kr_0 + i) \dot{\xi}_0}{(1 + k^2 r_0^2)} e^{i\omega t}. \quad (172)$$

Акустическое сопротивление системы на единицу поверхности равно, поскольку $\omega = kc$:

$$Z_R = \frac{p(r_0)}{\dot{\xi}_0 e^{i\omega t}} = \rho c \frac{(k^2 r_0^2 + ikr_0)}{(1 + k^2 r_0^2)}. \quad (173)$$

Первый член в числителе является величиной вещественной, находится в фазе со скоростью и представляет поэтому некоторый коэффициент активного сопротивления; мнимая часть числителя совпадает по фазе с ускорением ($i\omega\dot{\xi}_0$) и представляет поэтому коэффициент инерции. Перепишем эти коэффициенты

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \rho c \frac{k^2 r_0^2}{1 + k^2 r_0^2} \text{ (активное сопротивление),} \\ a_1 &= \rho \frac{r_0}{1 + k^2 r_0^2} \text{ (инерция),} \\ Z_R &= b_1 + i\omega a_1 \text{ (комплексное сопротивление).} \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

Приведенная здесь форма предпочтительна, однако, читатель может выразить все величины через длину волны, подставляя $\frac{2\pi}{\lambda}$ вместо k . Следует тут же заметить, что если r_0 становится весьма малым по сравнению с длиной волны (т. е., если генератор превращается в точечный источник, § 36), то сопротивление излучения обращается в

$$b_1 \Big|_{r_0 \rightarrow 0} = \rho c \cdot k^2 r_0^2 = \frac{\rho \omega^2 r_0^2}{c} \text{ на единицу поверхности.} \quad (174a)$$

Этот результат дает нам возможность выполнить давно взятое на себя обязательство — определить сопротивление излучения малого источника поверхности S в предположении сферического расхождения звуковой энергии от него. Имеем $r_0^2 = \frac{S}{4\pi}$ и, следовательно, для всей поверхности

$$Sb_1 = b_1' = \rho c \frac{k^2 S^2}{4\pi} = \rho \frac{\omega^2 S^2}{4\pi c}, \quad (175)$$

что представляет собой то соотношение, на которое мы ссылались. Закончим рассмотрением физического значения полученных результатов. Положим сначала, что частота генератора мала, иными словами, λ весьма велика; мы уже отмечали вид выражения для b_1 в этом случае. Вид выражения для инерции a_1 показывает, что масса жидкости $r_0\rho$ на единицу поверхности генератора как бы толкается вперед и назад во время колебаний, как если бы она была жестко связана с пульсирующей сферической поверхностью генератора. Получается как бы добавочная масса, обязанная своим происхождением среде. В случае звукового генератора, погруженного в воду, добавочная масса, создаваемая водой, может в несколько раз превосходить действующую массу самого генератора, что имеет следствием весьма значительное понижение собственной частоты системы.

Добавочная масса для всей поверхности сферы равна $4\pi r_0^2 \cdot \rho$; общий эффект добавочной инерции вследствие влияния среды, таким образом, эквивалентен количеству жидкости, содержащейся в сфере, в три раза большей, чем генератор. Этот эффект аналогичен получаемому при линейном (колебательном или не колебательном) движении сферы при малых скоростях; в этом последнем случае добавочная инерция равна инерции половины количества жидкости, смещаемой сферой (Лемб, § 77).

На рис. 13 нанесены интересные кривые изменения a_1 и b_1 с частотой, вычисленные для сферы единичного радиуса, пульсирующей в жидкости единичной плотности. (Взаимно противоположные изменения a_1 и b_1 напоминают подобные же соотношения, которые наблюдались нами ранее — при рассмотрении реакций давления как функций частоты; в связи с этим интересно сравнить рис. 5).

При более высоких частотах изменение a_1 и b_1 для пульсирующей сферы прекращается; при очень малых λ имеем, так как k становится весьма большим:

$$b_1 = \rho c = R \quad (\text{ср. 117a}) \quad (176)$$

сопротивление излучения, характеризующее среду и полученное нами ранее для плоских волн. Одновременно с уменьшением λ быстро уменьшается член, выражающий инерцию (174), и становится малым. Когда λ становится практически меньше, чем (например) π , тогда генератор

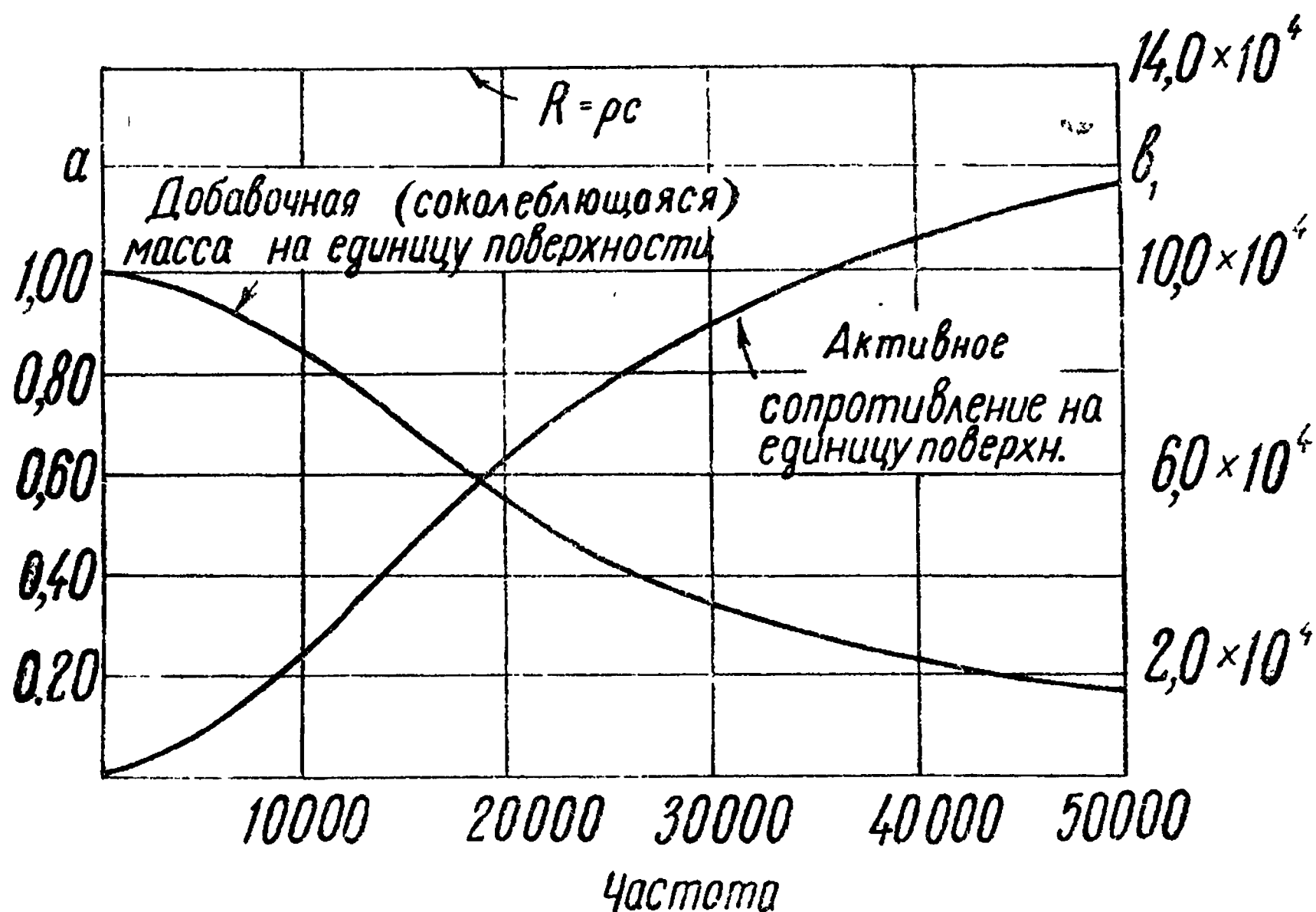


Рис. 13. Реакции на погруженный в воду пульсирующий шар единичного радиуса.

работает только на сопротивление излучения (и еще на собственное свое сопротивление) и производит максимальный звуковой эффект.

Приведенное решение этой специфической задачи наглядно иллюстрирует трудности „возбуждения“ акустической среды, т. е. излучения звука без простого выталкивания среды в точке возбуждения. Решение является весьма важным и должно быть как следует понято читателем, прежде чем он приступит к другим вопросам излучения. Заметки Стокса (Лемб, § 80, или Рэлей II, § 324) могут быть в связи с этим рекомендованы к изучению; теория Стокса в целом изложена в его статье в Phil. Trans. Roy. Soc., 158, июнь 18, 1868, перепечатанной в его „Сборнике статей“, том IV, стр. 299.

§ 38. Реакция окружающей среды на колеблющуюся струну.

Полное решение этой задачи является специальным и трудным делом, однако, в данном параграфе уместно им заняться, так как это даст возможность свести вместе отдельные пункты, касающиеся взаимодействия

колебательной системы и среды, которое мы в процессе изложения уже разбирали. Эти пункты суть излучение энергией системой, добавочная масса и, наконец, рассеяние вследствие вязкости в среде. В связи с последним рассмотрим важное приложение — струнный гальванометр. Собственно говоря, излучение колеблющейся струны является наименее важным из перечисленных явлений, однако, необходимо заняться им в первую очередь, чтобы исключить его в дальнейшем из рассмотрения. Предвосхищая выводы одного из следующих параграфов (§ 40), укажем, что любой элемент струны является фактически двойным источником и поэтому обладает, за исключением работы при очень высоких частотах, весьма малым полезным действием. Стокс, например, в названной выше классической статье показывает, насколько слабо колебания струны передаются окружающему газу. Если бы боковое (т. е. не радиальное) движение вблизи струны могло быть предотвращено, то интенсивность звука возросла бы в огромной степени. „Это показывает необходимость наличия дек в струнных инструментах. Хотя амплитуда колебания частиц деки очень мала по сравнению с амплитудой колебания частиц струны, однако, поскольку она представляет большую поверхность для воздуха, она способна вызвать громкие звучные колебания, в то время как струна, закрепленная абсолютно жестко, могла бы вызвать непосредственно в воздухе лишь столь слабые колебания, что они, в большинстве случаев, не были бы слышимы“ (Стокс, цитируемый Рэлеем, loc. cit.).

После продолжительного исследования А. Калähне (Ann. d. Phys., 45, 1914, стр. 657) нашел, что излучение с бесконечной струны зависит от величины

$$\kappa = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda'}\right)^2}, \quad (177)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ характеризует среду (как обычно) и λ' — длина волны колебаний струны. Найдено, что при установившемся режиме в (безграничной) окружающей среде для κ вещественных (т. е., когда волновая скорость в струне более волновой скорости в среде) налицо имеется поступательное движение волн и, следовательно, излучение со струны; наоборот, когда κ равно нулю или мнимо, в среде устанавливаются стоячие волны и излучения не происходит. В обоих случаях волновое движение в среде уменьшается с увеличением расстояния от струны; и даже в первом случае излучение не очень велико. Из этих соображений и ввиду некоторых математических трудностей Калähне умышленно пренебрегает сопротивлением излучения при подсчете добавочной массы, появляющейся от влияния среды.

Работа Калähне о добавочной массе (или о понижении собственной частоты системы) помещена в двух статьях Ann. d. Phys., 45, 1914, стр. 321 и там же, 46; 1915, стр. 1). Объектом излучения служат сплошные или полые стержни, совершающие поперечные колебания в жидкостях или газах. Пока плотность среды несравнима с плотностью стержня (или струны), добавочная масса невелика. Результирующее понижение частоты для массивной струны равно:

$$\frac{n - n'}{n} = -\frac{L}{2} \cdot \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (177a)$$

где ρ — средняя плотность среды, ρ_0 — объемная плотность струны, n — частота в вакууме, n' — действительная частота в среде и L — коэффициент, выраженный в цилиндрических функциях, во всех практических случаях равный, примерно, единице и стремящийся к нулю при очень высоких частотах.

Заметим сначала, что формула Kalähne при низких частотах (для которых $L=1$), хорошо согласуется с тем, что мы могли бы ожидать согласно теории равновесия. Известно, что цилиндр, движущийся „боком“ в жидкости, при обычных скоростях нагружается добавочной массой, эквивалентной количеству жидкости, смещенной цилиндром. Следовательно, добавочная масса относится к собственной массе сплошного цилиндра как $\rho:\rho_0$. Так как собственная частота натянутой струны равна постоянной, деленной на квадратный корень из плотности ее материала (§ 28), т. е. $n = \frac{C}{\sqrt{\rho_0}}$, то при всяком приращении $\delta\rho_0 \equiv \rho$ фактической плотности струны мы должны получить отрицательное приращение δn частоты, равное $\frac{n\rho}{2\rho_0}$.

Для углубления вопроса обратимся к обстоятельной статье Стокса „О влиянии внутреннего трения в среде на движение маятников“, опубликованной в 1856 г.¹⁾ Глава III и конец главы IV этой статьи относятся к цилиндру, колеблющемуся в жидкости в направлении, перпендикулярном к его оси. Стокс, учитывая вязкость среды (чего нет у Kalähne), интересовался затуханием и удлинением периода цилиндрического маятника под влиянием реакции окружающего воздуха.

Мы не будем дублировать формулы Kalähne формулами Стокса там, где речь идет об изменениях частоты от реакций, и попытаемся получить выражения затухания вследствие трения, принимая прежнюю величину добавочной массы при низкой частоте.

Решение Стокса зависит от некоторой цилиндрической функции $F(ma)$ (уравнения 85, 87, 93 оригинальной статьи), где a — радиус цилиндра и

$$m = \sqrt{\frac{i n \rho}{\mu}}.$$

Он получил для реакции, действующей на цилиндр и выраженной через ускорение $i n \dot{z}$:

$$M'(1 - \frac{4F_1'(a)}{m^2 a F_3(a)}) \cdot i n \dot{z} = M'(k - i k') i n \dot{z}, \quad (\text{Стокс}, 98)$$

где $M' = \pi a^2 \rho \cdot l$ — масса жидкости, вытесненной цилиндром длиной l . В этом выражении kM' — добавочная масса и $n k' M'$ — коэффициент сопротивления; Стокс вычислил таблицы для k и k' при больших пределах изменения аргумента $1/2 |m| a$.

Для воздуха приближенно $\frac{\rho}{\mu} = 7,0$; соответственно для провода радиусом 0,05 см, колеблющегося с частотой 1000 периодов в 1 сек., $|m| a$ оказалось бы равным около 10. В таких случаях приходится пользоваться решением Стокса для больших значений аргумента, именно:

$$k = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{|m| a}, \quad k' = \frac{2\sqrt{2}}{|m^2| a} + \frac{2}{|m^2| a^2},$$

(Стокс, конец главы III).

Отсюда для добавочной массы на единицу длины цилиндра имеем

$$a_1 = \pi a^2 \rho k = \pi a^2 \rho (1 + \frac{2}{a} \sqrt{\frac{2\mu}{n\rho}}) \quad (178)$$

¹⁾ Camb. Philos. Soc. Trans., IX, 1856, стр. 8; перепечатанное в „Сборнике“ Стокса, том III, стр. 1.

и для коэффициента сопротивления

$$b_1 = \pi a^2 \rho n k' = 2\pi a^2 \left[\frac{1}{a} \sqrt{2n\rho\mu} \left(1 + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu}{2n\rho}} \right) \right]. \quad (178a)$$

Очевидно, что при $\mu = 0$ добавочная масса равна как раз той, которую мы получаем из теории равновесия, причем эта величина ведет к выведенной ранее приближенной формуле для уменьшения собственной частоты. Рассматривая только влияние вязкости, находим, что оно сказывается больше всего при низких частотах и асимптотически стремится к нулю с возрастанием частоты; следует, однако, заметить, что формула несправедлива при чересчур низких частотах, так как вышеприведенное разложение сделано для $|m|a > 1$. Для приблизительного определения показателя затухания струны положим величину b_1 , равной удвоенной общей (собственной и добавочной) массе единицы длины струны. Общая масса равна $\pi a^2(\rho_0 + \rho)$. Вычисляя приближенно, имеем

$$\Delta = \frac{b_1}{2\pi a^2(\rho_0 + \rho)} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \right) \left(\frac{\sqrt{2n\rho\mu}}{\rho_0 a} + \frac{\mu}{\rho_0 a^2} \right) \quad (178b)$$

или еще проще

$$\Delta = \frac{\sqrt{2n\rho\mu}}{\rho_0 a}. \quad (178c)$$

Теперь ознакомимся с некоторыми недавними экспериментальными работами. Мартин (H. Martin, Ann. d. Phys., 77, 1925, стр. 627) произвел опытную проверку формулы Kälähne, наблюдая уменьшение собственной частоты стальных проволок, погружаемых в жидкости. Частота n считается неизменной для струны в воздухе вследствие малости величины $\frac{\rho}{2\rho_0}$; оказалось, что для стальных проволок в воде формула очень хорошо подтверждается фактами, именно с точностью до одного-двух процентов.

Прибор Мартина состоял из натянутой проволоки, погруженной в жидкость и приводимой в движение магнитом; колебания при разных частотах наблюдались в микроскоп. Таким путем были сняты кривые резонанса, по которым (если колебания были достаточно малы) можно было найти резонансную частоту и показатель затухания. После весьма тщательно проведенных исследований он нашел для стальных проволок следующее соотношение между показателем затухания системы и другими величинами:

$$\Delta = \frac{1,45 \sqrt{\rho n \mu}}{a \cdot \rho_0}, \quad (178d)$$

которое вполне совпадает с формулой, найденной нами на основании вычислений Стокса¹⁾. Следовательно, мы имеем для некоторых случаев

¹⁾ Мартин цитирует выражение, данное Клеменчицем (I. Klemenčič, Wien. Ber., 84, II Abt., 1881, стр. 146) для цилиндра, погруженного в жидкость и колеблющегося около оси, перпендикулярной к его собственной оси:

$$\Delta = \frac{\sqrt{\rho n \mu}}{a \rho_0} + \frac{\mu}{\rho_0 a^2} - \frac{a^2 \rho_0^2}{6 \mu \rho}.$$

Очевидно, что первый член формулы Стокса лучше согласуется с результатами опытов Мартина, чем первый член формулы Клеменчица; вторые члены в обоих выражениях одинаковы.

прекрасную теорию затухания колеблющейся струны вследствие вязкости окружающей жидкости. Попутно отметим большое сходство между вышеуказанным показателем затухания и коэффициентом α' (уравнение (R) приложения А) для звуковых волн в вязкой среде, охваченной трубкой; они различаются только множителем $2c$ (двойной волновой скоростью), что необходимо для соблюдения размерности.

Большой интерес представило бы далее вычисление добавочной массы и затухания весьма тонкого провода в воздухе. Можно предположить заранее, что „воздушное демпфирование“ тонкого провода будет весьма большим; и так оно и обстоит в действительности; практически явление используется в струнном гальванометре Эйнтховена, для правильного действия которого главнейшую роль играет прежде всего тонкость струны. Теория Стокса, если применить ее для малых величин аргумента $|m|a$, дает сильно преувеличенные значения добавочной массы и сопротивления вследствие вязкости среды (уравнение 115 оригинальной статьи), однако, Стокс указал на неприменимость теории к этому предельному случаю. Цитируем конец главы IV упомянутой его статьи: „Очевидно, что если радиус цилиндра очень мал, то движение цилиндра становится неравномерным. Это наблюдается на тонких проволочках, применяемых для подвески шариков в опытах с маятниками. В таком случае количество жидкости, переносимое проволочкой, уменьшается, частицы все время отстают и образуют вихри. В целом сопротивление, оказываемое проводу, увеличивается и по своим свойствам приближается к сопротивлению, являющемуся „функцией скорости“. Исходя из этих соображений, Стокс считал, что затухание такого провода должно фактически быть большим, чем вычисленное на основании ранее изложенной теории; ввиду получающейся неопределенности, оставим теоретические вычисления и будем рассматривать случай тонкого провода, главным образом, на основе экспериментальных данных. Последней по времени появления статьей о гальванометре Эйнтховена является статья Вильямса (H. V. Williams, Jour. Opt. Soc. Am., 9, 1924, стр. 129); в ней имеются ссылки на другую литературу, в том числе на оригинальные статьи самого Эйнтховена. Проф. Вильямс готовит вторую статью, посвященную экспериментальному исследованию гальванометра; он любезно предоставил возможность пользоваться для этой книги своими неопубликованными материалами и своим большим опытом работы с описываемым прибором.

Содержание статьи Вильямса (1924) составляет теория движения токонесущей струны, являющейся фактически „равномернонагруженным“ телом вследствие электродинамического взаимодействия между всеми элементами струны и перпендикулярным магнитным полем, в которое она помещена. Сама теория поведения струны под действием равномерно распределенной переменной силы весьма интересна, однако, мы ее здесь касаться не будем. Было отмечено как опытный факт, что если выбрано одно из собственных колебаний вполне определенной частоты (гармоники исключаем), то показатель затухания сохраняет свою величину в весьма широких пределах изменения амплитуд (Вильямс, loc. cit., стр. 161). Однако, при теоретическом изучении гальванометра как такового, повидимому, не принималось в расчет изменение показателя затухания с частотой; справедливость этого нас и будет в первую очередь интересоваться.

Опыты Эйнтховена описаны в статье в App. d. Phys., 21, 1906, стр. 483—514 и 665—700 (две части). Он проделал измерения над несколькими струнами при изменении их натяжения в широких пределах; из всех случаев мы выберем лишь два, именно случай колебательный, т. е. сильного натяжения, и случай слабого натяжения, или сверхапероодический, при котором n_0 меньше, чем Δ .

Эйнтховен измерил логарифмический декремент (δ) для колебательного случая и определил активное механическое сопротивление r из следующих соотношений:

$$\Delta = \frac{\delta}{T}, \quad r = 2m_0 \Delta, \quad m_0 = -\frac{s}{n_0^2},$$

где T — действительный период колебания и $\frac{n_0}{2\pi}$ — собственная частота. Очевидно, что в этом случае m_0 представляет собою идеальную или производную действующую массу, которая действительна лишь при быстрых колебаниях, но не может быть применена к более медленному движению струны при слабом натяжении.

Рассмотрим теперь сверхапериодический случай. Эйнтховен произвел ряд измерений механического сопротивления (r) системы, базируясь на точке перегиба кривой нарастания отклонения при приложении постоянной силы (тока). Далее (как указывается также в задаче § 2 главы I) в точке перегиба ускорение равно нулю и имеем

$$q = \frac{r}{s} \dot{\xi}, \quad \left(q = \frac{F}{s} - \xi; \quad \dot{q} = -\dot{\xi} \right).$$

Следовательно, в этой точке r выражено через постоянную упругости (s) и через графически измеренные величины q и $\dot{\xi}$; однако, следует помнить, что эти соотношения зависят от изменения постоянных массы и сопротивления, что и предполагается в анализе Эйнтховена. Можно с уверенностью считать, что для каждого отдельного случая упругость постоянна; однако, если меняются масса и сопротивление, то предпочтительнее соотношение между смещением и скоростью в точке нулевого ускорения писать:

$$q = -\frac{2\Delta_i}{n_0^2} \dot{\xi},$$

причем индекс i относится к условиям в точке перегиба. Это следует из уравнения (получаемого из исходного дифференциального уравнения при принятии $\ddot{\xi} = 0$):

$$2\Delta_i \dot{\xi} + n_0^2 \xi = 0, \quad \left(\Delta_i = \frac{r_i}{2m_i} \right);$$

последним мы вынуждены пользоваться, если в опытах упругость полагалась постоянной и изменения r , m и Δ были неизвестны. Эйнтховен, видимо, полагал (loc. cit., стр. 503), что r почти постоянно, так как при измерении вышеописанным способом оказывалось, что величина r почти не менялась при изменении натяжения струны в широких пределах; так, в одном из опытов пределы эти относились между собой как 1:324.

Более справедливо как будто все же будет выразить окончательный результат не через r , а через Δ , вследствие того, что изменения r и m могут ускользнуть от наблюдения, пока Δ остается приблизительно постоянной величиной. Весьма вероятно, что меняется как добавочная масса, так и сопротивление струны; мы склонны полагать, что они меняются, как то предсказано теорией Стокса.

Эйнтховен заметил также (loc. cit., стр. 670), что при ослабленном натяжении струна ведет себя так, как если бы имелось изменение ее массы, причем при опытах предполагалось, что сопротивление постоянно. (Он нашел, что масса тем больше, чем медленнее движение — явление, находящееся в согласии с теорией). Возможен случай, когда в пределах

известного диапазона частот меняются как масса, так и сопротивление, причем таким образом, что они компенсируют друг друга, в результате чего получается более или менее постоянная величина затухания. В связи с этим можно привести один из опытов Вильямса. Первоначально были измерены затухание и собственная частота (1200 герц) струны гальванометра при некотором натяжении; затем было вычислено, в предположении неизменного затухания, что струна должна стать аperiодической при 400 герц. Затем натяжение было соответственно ослаблено для получения этой собственной частоты, причем действительно струна оказалась аperiодической в пределах $1/3\%$ от величины отклонения постоянным током.

Естественно заключить отсюда, что при очень медленном движении тонкой струны должно иметь место явление некоторой взаимной компенсации изменений добавочной массы и сопротивления. Таким образом, с экспериментальной точки зрения демпфированная воздухом струна дает одно из наиболее интересных следствий теории Стокса, в особенности, если принять во внимание преодоленные им теоретические трудности и тщательность выполненной работы. Простые вычисления на основе теории Стокса дают для очень тонкой струны для добавочных массы и сопротивления значения, совместимые с наблюдаемыми на опыте явлениями, которые мы описываем; читатель, желающий углубиться в эту область явлений, может исследовать изменения функций Стокса k и k' при весьма малых значениях аргумента (ma).

В заключение упомянем об электрическом демпфировании. Каждый гальванометр с малым электрическим сопротивлением может быть сильно задемпфирован соответствующим устройством внешней цепи. Если сам прибор обладает неустойчивой механической характеристикой, то часто выгодно таким путем его стабилизировать. В гальванометре Эйнтховена тонкость струны, которой прибор обязан своей чувствительностью и затуханием, обуславливает большое электрическое сопротивление, почему применение электрического демпфирования затруднительно; оно, однако, как мы видели, и не требуется. В связи с этим упомянем об одном весьма тонком теоретическом моменте; он содержится в одной статье Орнштейна (L. S. Ornstein, Kon. Acad. Amsterdam Proc. XVII, Nov. 28, 1914, стр. 784) относительно теории струнного гальванометра. Оказалось, что электрическое демпфирование получается лишь для частот, являющихся нечетными кратными основной частоты струны и так как только нечетный отрезок струны вносит затухание, то наиболее важные случаи получаются при колебаниях с более низкими частотами. Статья Орнштейна содержит и другие интересные данные; повидимому, эта статья наиболее сжато излагает теорию струнного гальванометра.

ЗАДАЧИ.

21. Плоская звуковая волна в воздухе обладает интенсивностью в 1 эрг в секунду. Какая сила действует на 10 см^2 бесконечной стены (нормальной к волне) при ударе волны о нее?

22. Пусть в задаче 21 рассматриваемая поверхность представляет собою поршень с постоянными $b = 200 \text{ CGS}$, $c = 10^7 \text{ CGS}$ и $a = 1 \text{ г}$. Каково уравнение установившегося движения поршня?

23. Чему равно добавочное сопротивление поршневой системы (если оно есть), появляющееся от того, что она излучает в полубезграничной среде?

24. Плоская звуковая волна в воде встречает поверхность раздела вода—воздух под углом 45° . Исследовать свойства отраженной и проходящей волн. Как они меняются, если среды с большей и меньшей плотностью поменяются местами по отношению к поверхности раздела?

25. На линии передачи мощности применена труба диаметром 3 см, причем передающей средой служит вода; линия работает при 100 герц. Пользуясь законом Гельмгольца для сопротивления в трубе (приложение А, уравнение (R), оценить с инженерной точки зрения максимальное расстояние для экономичной передачи мощности и указать критерии, на которых основывается ваша оценка. Как изменится ваше заключение, если вместо воды будет применено масло с вязкостью $\mu = 1,0$ и плотностью $\rho = 0,9$?

26. Жидкость вязкости μ заключена в узкой щели, образованной параллельными стенками, отделенными расстоянием d . Показать, применяя метод, аналогичный изложенному в приложении А, что средний коэффициент сопротивления равен $R = \frac{12\mu}{d^2}$, как было указано в уравнении (37) главы I.

27. У обоих концов трубы длиной l , содержащей воздух (см. § 32) расположены поршни с упругими закреплениями, но свободные от активного сопротивления. Пренебрегая рассеянием в трубе, показать, что собственные частоты системы выражаются уравнением

$$\operatorname{ctg} \beta l = \frac{-i(Z_0 Z_l + \rho^2 c^2)}{\rho c(Z_0 + Z_l)}.$$

Основываясь на этом уравнении, исследовать наиболее интересные случаи резонанса системы при разных значениях l и различных соотношениях между Z_0 , Z_l и ρc .

28. Полагая потенциал скорости равным:

$$\varphi = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) \cos \omega t,$$

найти собственные частоты трубы длиной l , наглухо замкнутой на обоих концах (§ 33). Определить также пространственное распределение амплитуды и давления в трубе при колебаниях в собственных частотах.

29. Пульсирующая сфера радиуса 10 см настроена на 1000 герц и обладает собственным (механическим) сопротивлением при этой частоте, равным 20 единицам CGS на единицу площади. Полагая, что к поверхности приложена сила $\Psi_0 e^{i\omega t}$ на единицу площади, найти отношение излученной энергии ко всей затраченной энергии при 1000 герц, когда сфера погружена: 1) в водород, 2) в воздух и 3) в воду. Каковы относительные интенсивности звука в одинаковых точках поля в этих трех средах?

30. Работают две одинаковых сирены: одна — в воздухе, вблизи земли на ровной местности; другая — непосредственно под поверхностью спокойной воды. Каковы должны быть их относительные мощности, чтобы слушатель, находящийся на данном расстоянии, слышал звук равной интенсивности от обеих сирен (полезное действие аппаратов подслушивания принимаем в обеих средах одинаковым и пренебрегаем всякого рода ослабляющими влияниями).

Далее, учитывая рассеяние вследствие вязкости в обеих средах, указать, как изменятся ваши выводы для составляющих звука сирены частоты 1000 и 3000 герц.

ГЛАВА IV.

ПРОБЛЕМЫ ИЗЛУЧЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ.

§ 40. Общие соображения; одиночные и двойные источники.

В предыдущих главах основное внимание уделялось не столько результатам, сколько методам, следствием чего явилась возможность развить до известной степени единую и связную общую теорию явлений. В на-

стоящей главе мы от этого порядка отступаем, так как нам придется детально изучить некоторые практические приложения, которые еще больше выявят полезность предшествовавшей теории.

Ввиду серьезных математических трудностей мы будем иногда жертвовать строгостью анализа, чтобы подойти к практическим выводам без утомительных выкладок.

Прежде чем обратиться к типичным задачам излучения, упомянем вкратце об одном интересном представлении из классической теории, именно о двойном источнике или акустическом диполе. Он состоит из двух малых простых источников, примыкающих один к другому и одинаковых во всем, кроме знака коэффициента напряженности A . Потoki жидкости у обоих источников расходятся по фазе на 180° . Потенциальная теория акустического диполя аналогична теории магнитного диполя или электростатического диполя; эта идея возникла из необходимости определения акустического поля, создаваемого камертонами, мембранами с обеими сторонами, обращенными к среде, и тому подобными приборами, развивающими равные и противоположные силы, действующие на среду в двух близлежащих точках.

Пусть $\pm A'$ — напряженность каждой составляющей двойного источника и δx — расстояние между составляющими, причем ось диполя параллельна OX .

Можно показать, что потенциал скорости в точке на расстоянии r от диполя равен:

$$\varphi = -\frac{A'\delta x}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right) = -\frac{A}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r} \right) = \cos \theta, \quad (179),$$

где $A = A'\delta x$ — конечная величина и $\delta r = \delta x \cos \theta$, причем θ — угол наклона радиуса-вектора r к оси диполя.

Выполняя дифференцирование, имеем, полагая $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\varphi = \frac{(1 + ikr) A}{4\pi r^2} \cos \theta \cdot e^{-ikr} e^{i\omega t}. \quad (179a)$$

Если kr мало, т. е. для точек вблизи диполя потенциал скорости меняется по закону $\frac{1}{r^2} \cos \theta$; для больших значений r — соответствующий множитель коэффициента — равен $\frac{ik}{r} \cos \theta$. Таким образом, на больших расстояниях вдоль оси условия не сильно отличаются от условий в поле одиночного источника. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ (т. е. когда r нормально к оси) излучение диполя равно нулю; очевидно, что в среднем (учитывая только энергию), диполь является худшим излучателем, чем простой источник с той же напряженностью.

В современной акустической практике мы имели дело с генерирующими и детектирующими приборами, у которых к среде обращена одна лишь сторона колеблющегося элемента или диафрагмы; поэтому знание свойств двойного источника не является особо необходимым, и мы в дальнейшем на них не будем останавливаться. Оно очень полезно при решении таких задач, как излучение колеблющейся средой (Лемб, § 77, Рэлей II, § 328) или рассеяние звуковых волн сферическим препятствием (Лемб, § 81); интересующийся этими вопросами читатель может обратиться к классическим трудам.

Приступим к исследованию более важной задачи об излучении круглого поршня. Для упрощения математических выкладок положим, что поршень движется в цилиндрическом отверстии в жесткой плоской стенке; таким образом, излучение происходит в полубезграничную среду. Действие поршня на среду можно рассматривать как сумму действий элементарных источников напряженности $dS \cdot \dot{\xi}_0$ каждый, равномерно распределенных по поверхности S поршня. Так как расхождение излучения с каждого элементарного источника вследствие присутствия стенки происходит в телесном угле 2π вместо угла 4π уравнения (160), имеем для потенциала в какой-либо точке на расстоянии r от элементарного источника

$$\varphi = \frac{dS \cdot \dot{\xi}_0}{2\pi r} e^{i\omega t} e^{-ikr}. \quad (180)$$

и, следовательно, потенциал скорости от всего поршня равен:

$$\varphi = \frac{\dot{\xi}_0 e^{i\omega t}}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r} dS. \quad (180a)$$

Эта полезная формула (существование которой предполагалось при анализе формулы (160) выведена на основании физических соображений; она представляет частный случай более общей формулы, которая может быть выведена достаточно строго. Эта общая формула (Р э л е й, II, § 278, § 302) имеет вид:

$$\varphi = -\frac{i\omega t}{2\pi} \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} dS, \quad (180b)$$

где $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ есть нормальная скорость элемента dS движущейся поверхности; в уравнении (180) $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \dot{\xi}_0$ как величина, не зависящая от dS , вынесена за знак интеграла. Уравнения (180a) и (180b) могут служить исходной точкой для исследования излучения в полубезграничную среду колеблющейся поверхностью тела, если $-\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ известно для каждой точки поверхности.

§ 41. Излучение поршня при высоких частотах; диффракция.

Основываясь на принципах, установленных в §§ 27 и 40, мы можем приступить к исследованию излучения плоского поршня в полубезграничную среду, когда поршень приводится в движение с какой-либо частотой. Прежде чем разобрать вопрос в общем виде, рассмотрим частный случай—излучение при высоких частотах и сопутствующие ему явления диффракции. Пусть диаметр поршня велик по сравнению с длиной волны; тогда будет справедливо допущение, что на небольшом расстоянии от поршня волны почти плоские, и, следовательно, добавочной массы от влияния среды существовать не будет. Более того, сопротивление излучения будет такое же, как для плоских волн, т. е. $R_1 = \rho c$ на единицу поверхности поршня. Все же на некотором расстоянии от поршня излучение начинает расходиться; с этого места интенсивность ослабевает, и, в конце концов, становится обратно пропорциональной квадрату расстояния от источника. Аналитическая проверка этих положений дается в настоящем и следующем параграфах.

Мы ограничимся исследованием условий на оси симметрии системы, в каком случае интегрирование уравнения (180a) не представляет трудностей. Если поршню сообщено движение $\xi_0 \cos \omega t$, то потенциал скорости в обозначениях черт. 14 равен

$$\varphi(x) = \frac{\dot{\xi}_0 e^{i\omega t}}{2\pi} \int_{y=0}^{y=R} \frac{2\pi y dy}{\sqrt{\lambda^2 + y^2}} e^{-ik\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{i\dot{\xi}_0}{k} e^{i\omega t} e^{-ik\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_0^{y=R}, \quad (181)$$

причем, очевидно, должна быть сохранена лишь вещественная составляющая. Положим теперь $R = m\lambda$; подставляя пределы y и оставляя лишь вещественные значения, имеем

$$\varphi = -\frac{\dot{\xi}_0}{k} \left[\sin(\omega t - k\sqrt{x^2 + m^2\lambda^2}) - \sin(\omega t - kx) \right], \quad (182)$$

что вполне точно для всех точек на оси. Так как $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то для $x = 0$ максимальное значение φ в центре поршня равно нулю или $\frac{2\dot{\xi}_0}{k}$ соответственно при $m = n$ или $m = n + \frac{1}{2}$, где n — целое число. Очевидно также (если продифференцировать по x), что скорость при $x = 0$ равна $\dot{\xi}_0 \cos \omega t$, как оно и должно быть.

Для исследования условий в точках, лежащих на оси, для которых $x > 3m\lambda$, мы вправе воспользоваться приближенным равенством:

$$\sqrt{x^2 + m^2\lambda^2} = x \left(1 + \frac{m^2\lambda^2}{2x^2} \right) = x + \alpha \quad (183)$$

и так как

$$\sin(\theta - k\alpha) - \sin \theta = -2 \cos\left(\theta - \frac{k\alpha}{2}\right) \sin \frac{k\alpha}{2},$$

то имеем

$$\varphi = + \frac{2\dot{\xi}_0}{k} \sin \frac{k\alpha}{2} \cos\left(\omega t - kx - \frac{k\alpha}{2}\right). \quad (184)$$

Максимальная величина давления равна:

$$p = p_{\max} = \frac{2\rho\dot{\xi}_0\omega}{k} \sin \frac{k\alpha}{2} = 2\rho c\dot{\xi}_0 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m^2\lambda}{x}, \quad (185)$$

поскольку $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$; поэтому интенсивность согласно (164a) будет

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{1}{2} \frac{p_{\max}^2}{\rho c} = 2\rho c\dot{\xi}_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{m^2\lambda}{x}\right). \quad (186)$$

Из (186) заключаем, что вне точки $x = m^2\lambda$ имеется пучок приблизительно параллельных лучей излучения, что вдоль оси внутри области $0 < x < m^2\lambda$ имеется последовательная смена максимумов и минимумов интенсивности (аналогично светлым и темным пятнам в явлениях оптической дифракции) вследствие интерференции лучей, идущих с разных участков поршня; и, наконец, что при больших значениях x для точек на оси

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{\pi\rho c}{2} \frac{m^2}{x^2} \cdot \pi R^2 \dot{\xi}_0^2. \quad (186a)$$

Очевидно, что излучение имеет тенденцию расходиться и принять в конце концов форму конуса и что когда превзойдено критическое расстояние $x = m^2 \lambda$, это расхождение получает преобладающее значение. Уравнение (186a) может быть написано в форме уравнения (164), а это приводит к интересным, хотя и несколько парадоксальным результатам.

Замечая, что $\pi R^2 = \pi \lambda^2 m^2 = S$ и $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, получаем из (186a)

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \rho c \frac{k^2 S^2 \dot{\xi}_0^2}{8 \pi^2 \lambda^2}. \quad (186b)$$

Таким образом, сравнивая с (164), видим, что на больших расстояниях применение аксиального излучения от большого поршневого источника дает четырехкратный выигрыш в интенсивности по сравнению с малым сферическим источником той же напряженности.

Заметим, что, кроме этого числового коэффициента, выражение (186b) ничем особым от (164) не отличается; следовательно, угол, образуемый конусом лучей, не влияет непосредственно на интенсивность вдоль оси конуса. Это, однако, не значит, что телесный угол, вмещающий в себя конус лучей, не определен или не зависит от размеров взятого в каждом отдельном случае поршня. Грубой мерой этого телесного угла является угол, под которым виден поршень из точки $x = m^2$; он равен:

$$\Omega = \frac{\pi \lambda^2 m^2}{m^4 \lambda^2} = \frac{\pi}{m^2}. \quad (187)$$

Очевидно, для данной длины волны расхождение конуса лучей меняется обратно пропорционально площади поршня.

Для таких соотношений, как зависимость между длиной волны и размерами источника, явления акустической диффракции вполне аналогичны явлениям оптической диффракции. Это сопоставление интересно в данном случае, если рассматривать поршень, как аналогию круглого отверстия в плоском экране, на который падают нормально световые волны.

При решении этой соответственной оптической задачи можно воспользоваться точкой зрения Фраунгофера; она предполагает параллельность лучей в падающем и подвергшемся диффракции пучке. Угол диффракции для первого минимума интенсивности равен $0,61 \frac{\lambda}{R}$, где R — радиус отверстия; на средних расстояниях (например, $x > 5R$) его можно определить без серьезной погрешности как угол, опирающийся на граничный радиус первой светлой диффракционной окружности, полученной на экране, нормальном к оси, если смотреть со стороны отверстия.

Мы приходим к представлению о том, что пока первый светлый диффракционный круг меньше, чем размеры отверстия, мы имеем дело по существу с параллельным пучком лучей и что с увеличением расстояния от отверстия первый и светлый диффракционный круг пропорционально расширяется, когда пучок расходится и принимает приблизительно форму конуса. Телесный угол конуса асимптотически приближается к величине

$$\frac{\pi (0,61 \lambda)^2}{R^2} = (0,61)^2 \cdot \frac{\pi}{m^2}. \quad (187a)$$

Последнее может считаться более точным выражением для Ω , чем (187). Грубо говоря, очевидно, существует некоторая точка на оси вблизи $x = m^2 \lambda$, которая отмечает начало перехода пучка излучения от параллельного к расходящемуся.

Во многих случаях большое удобство представляет гидро-динамический метод изучения явлений диффракции, причем зачастую им можно получить вполне строгие решения.

Разобранный нами случай имеет некоторое применение в высокочастотной подводной сигнализации. Низкочастотная подводная сигнализация хорошо исследована у Драйсделя (Drysdal, Chap. IX); указаний на применение высокой частоты для этих целей имеется, однако, в технической литературе очень мало, поэтому позволительно привести краткие указания на практическую сторону вопроса¹⁾.

Выгода высокочастотной сигнализации зависит не только от концентрации излучения (с точки зрения энергии), но также от присущего ей свойства направленности. Препятствия, как корабли, айсберги, подводные рифы и т. д., могут быть обнаружены на расстоянии мили и более по методу „эхо“. Лучший известный высокочастотный звуковой генератор представляет собою настраиваемую сложную систему, состоящую из секций кристаллов кварца, возбуждаемых пьезо-электрически, жестко укрепленных между двумя железными пластинами толщиной каждая в четверть волны. Одна сторона вибратора от среды экранирована. При работе, например, при 50 000 герц путем связи с высокочастотным источником электрической энергии вибратор ведет себя как конденсатор с некоторым внутренним омическим сопротивлением; до одной трети этого сопротивления может обуславливаться его сопротивлением излучения как звукового генератора. Эта излучательная способность весьма значительна и ограничивается только явлениями диэлектрического и упругого гистерезиса в системе, неизбежными при применяемых материалах. Для обнаружения высокочастотных звуковых волн можно применить устройство, аналогичное вибратору, или сам вибратор, как, например, при работе с эхо, что имеет преимущество легкости перехода с передачи на прием и обратно посредством переключателя. Площадь вибратора бывает порядка 400 см²; будучи использован в качестве детектора колебаний, он улавливает значительную энергию. В качестве детекторов могут быть применены угольные микрофоны и пьезо-электрические кристаллы сегнетовой соли, надлежащим образом включенные в резонансные системы. Электрические контуры, применяемые для передачи и приема, сходны с употребляемыми в радиотехнике. Рабочая частота высокочастотной подводной сигнализации должна быть ниже 100 000 герц по многим практическим соображениям. С одной стороны, коэффициент кинематической вязкости ведет при слишком высоких частотах к значительному ослаблению; с другой стороны, возникают затруднения в конструировании аппаратуры и в подборе пригодных материалов.

Температурные условия и течения в воде также являются искажающими факторами, усугубляющимися при высоких частотах; о них упоминалось в § 34.

§ 42. Излучение поршнем в полубезграницную среду.

Вернемся к разбору общей задачи об излучении колеблющегося поршня при таких частотах, когда необходимо считаться с расхождением вблизи поршня. Если нам удастся определить реакцию на поршень в функции

¹⁾ Следующий отрывок описывает некоторые неопубликованные опыты группы при университете в Колумбии (проф. Purin, Wills and Morescroft) 1918 года. Читатель может взять для сравнения подобное же описание опытов Ланжевена и Хилловского, помещенное в Nature, May 9, 1925, стр. 689—90; также французский патент № 505, 703 (1918) и британский патент № 145, 691 (1920) Ланжевена — кварцевого пьезо-электрического вибратора. Более подробное описание аппарата Ланжевена имеется в Hydrographic Review (Мопасо), II, № 1, 1924, стр. 57.

частоты, то мы получим материал, весьма полезный при решении ряда других задач.

Будем исходить снова из уравнения

$$\varphi = \frac{\dot{\xi}_0 e^{i\omega t}}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r} dS, \quad (180a)$$

причем имеют место геометрические соотношения рис. 14.

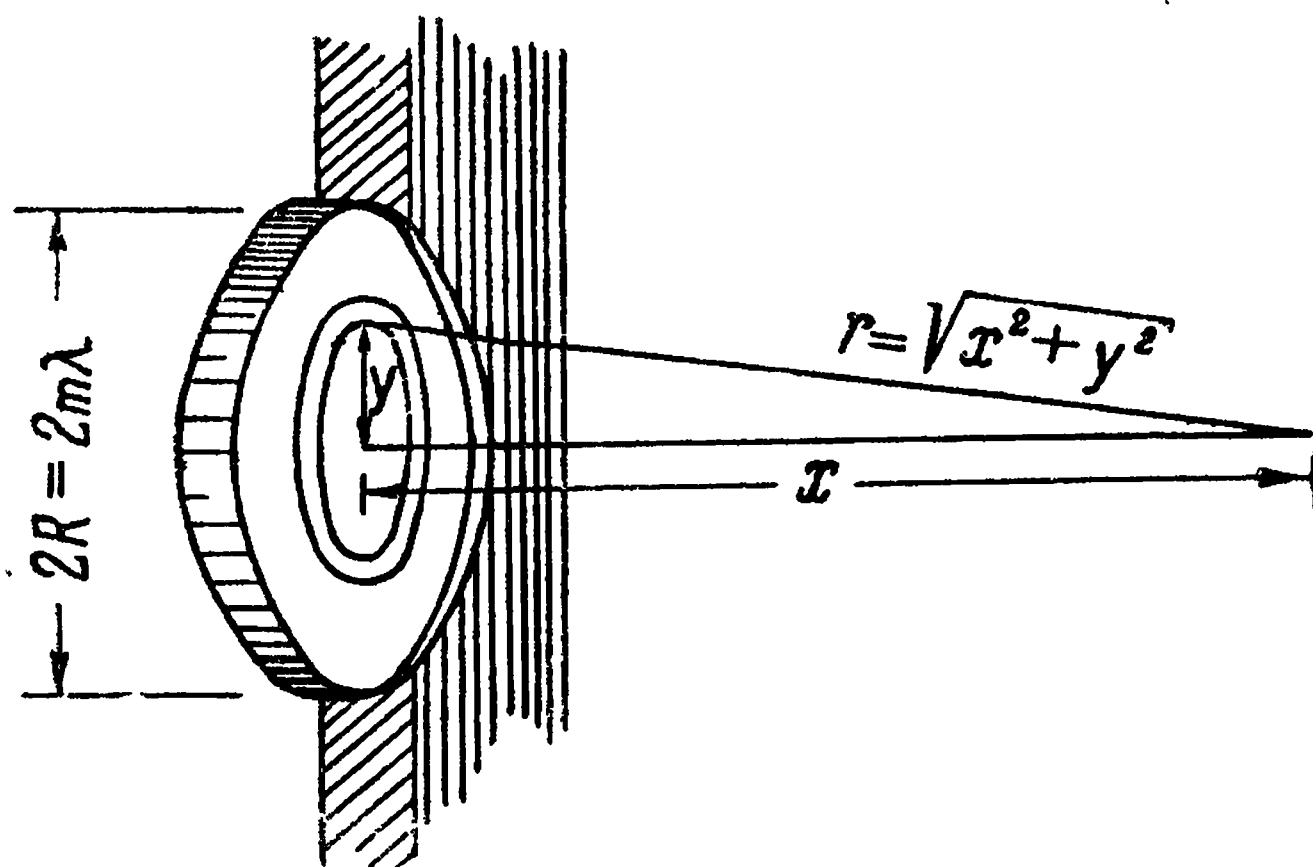


Рис. 14.

Давление на поршень в какой-либо точке y поршня равно поэтому

$$p(y) = \rho \dot{\varphi} \Big|_{r=y} = \frac{i\rho\omega\dot{\xi}_0 e^{i\omega t}}{2\pi} \iint_S \frac{dS}{r_1} e^{-ikr_1}, \quad (188)$$

где r_1 обозначает радиус-вектор, лежащий в плоскости поршня и простирающийся от точки y до элемента поверхности dS . Таким образом, для вычисления силы, действующей на поршень, необходимо выполнить интегрирование в (188), после чего полученное давление (функция y) проинтегрировать по всей поверхности поршня. Тогда сила оказывается равной:

$$\Psi = \iint_S p dS' = \frac{i\rho\omega\dot{\xi}_0 e^{i\omega t}}{2\pi} \iint_S dS \iint_S \frac{dS'}{r_1} e^{-ikr_1}, \quad (189)$$

где dS' обозначает элемент поверхности в точке y (рис. 15). Все элементы dS суммируются по отношению к каждому элементу dS' на поверхности диска; действие в dS от dS' совершенно то же, что действие в dS' от dS , так что после двойного суммирования результат получится в два раза больше того, который получился бы, если каждую пару элементов dS и dS' брать только по одному разу.

Поэтому задача может быть упрощена умножением интегрируемых выражений на два и таким порядком интегрирования, когда каждая пара элементов учитывается только раз.

Последнее достигается, если для каждого значения y (т. е. для каждого dS') интегрировать только по dS , лежащему во внутренней части диска; в данном случае это будет кольцо радиуса y и, таким образом, dS' остается вне области первого интегрирования.

Прежде всего возьмем интеграл

$$V = \iint_S \frac{dS}{r_1} e^{-ikr_1} = \iint \frac{r_1 dr_1 d\theta}{r_1} e^{-ikr_1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2y \cos \theta} e^{-ikr_1} dr_1 d\theta. \quad (190)$$

Вычисление проделано Рэлеем (II, § 302), однако, полезно его здесь повторить.

Вместо (190) можно брать интеграл

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2y \cos \theta} e^{-ikr_1} dr_1 d\theta = -\frac{2}{ik} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{-i2ky \cos \theta} - 1) d\theta,$$

т. е.

$$V = \frac{\pi}{ik} + \frac{2i}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2ky \cos \theta} d\theta. \quad (190a)$$

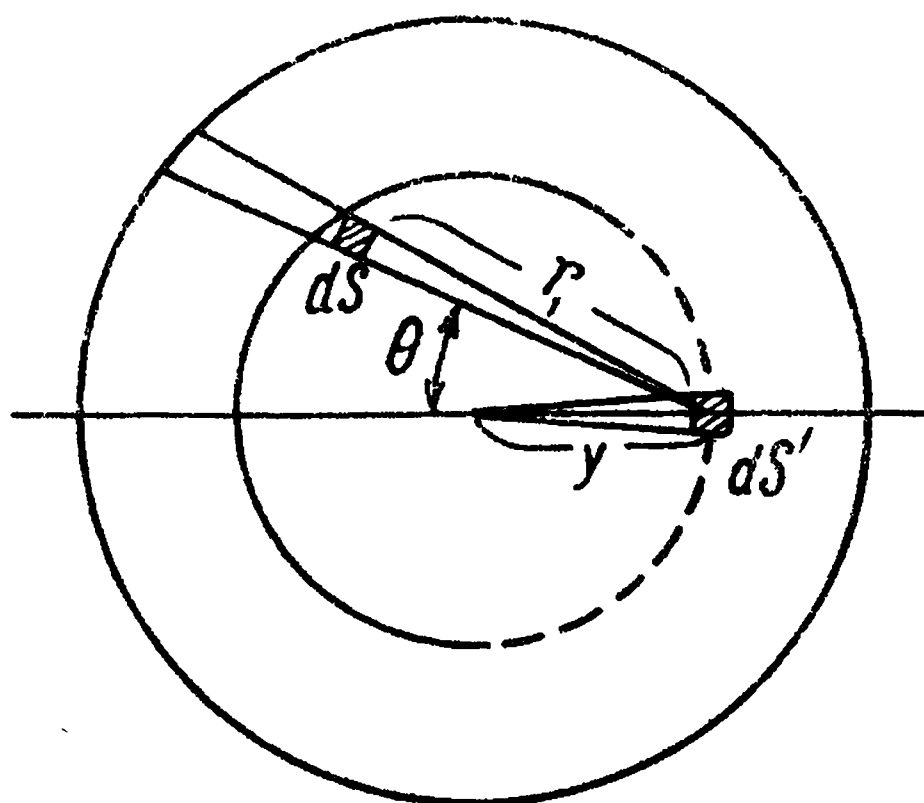


Рис. 15.

Разлагая показательную функцию в ряд и интегрируя почленно, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2ky \cos \theta} d\theta &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{2^2} (2ky)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4!} (2ky)^4 \dots \right] - \\ &- i \left[2ky - \frac{2}{3 \cdot 3!} (2ky)^3 + \dots \right], \quad (190b) \end{aligned}$$

так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{1 \cdot 3 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \dots n} \frac{\pi}{2}, \text{ если } n \text{ четно}$$

и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{2 \cdot 4 \dots (n-1)}{1 \cdot 3 \dots n}, \text{ если } n \text{ нечетно.}$$

Читатель легко установит, что выражение в первых скобках (190b) идентично $J_0(2ky)$, во вторых скобках стоит сопряженная, но нечетная функция, которую Рэлей определяет как

$$\frac{\pi}{2} \cdot K(z) = \left(z - \frac{z^3}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{z^5}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - \dots \right). \quad (190c)$$

Следует заметить, что это не есть полная Бесселева функция 2-го рода, так как она сама по себе не удовлетворяет уравнению Бесселя.

Теперь уравнение (190b) получает вид:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-i2ky \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{2} [j_0(2ky) - iK(2ky)]. \quad (190d)$$

Подставляя в (190a), получим окончательно

$$V = \frac{\pi}{k} [K(2ky) - i(1 - j_0(2ky))]. \quad (191)$$

V можно рассматривать как Ньютонов потенциал на краю диска радиуса y , причем плотность диска e^{-ikr_1} , если r_1 соответствует точке на краю диска.

Интегрируя 2-й член, именно $\int_s V \cdot dS'$, заметим, что $dS' = 2\pi y dy$.

Нам понадобятся следующие формулы интегрирования Бесселевых функций:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^b J_0(z) \cdot z dz &= z J_1(z) \Big|_0^b, \\ \int_0^b K(z) \cdot z dz &= K_1(z) \Big|_0^b. \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

Первая формула соответствует уравнению (47), § 12, вторая формула следует из определения $K(z)$, причем значение $K_1(z)$ дано в (195).

Пользуясь этими соотношениями и удваивая полученные путем интегрирования величины, имеем для силы, действующей на поршень:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{i\omega\rho\xi_0 e^{i\omega t}}{\pi} \int_0^R 2\pi y dy \cdot \frac{\pi}{k} [K(2ky) - i(1 - J_0(2ky))] = \\ &= i\omega\rho\pi\xi_0 e^{i\omega t} \left[\frac{1}{2k^3} K_1(2kR) - i \frac{R^2}{k} \left(1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} \right) \right], \quad (193) \end{aligned}$$

или так как $\omega = kc$

$$\frac{\Psi}{\xi_0 e^{i\omega t}} = \pi R^2 \cdot \rho c \cdot \left(1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} \right) + i \frac{\omega\rho\pi}{2k^3} K_1(2kR). \quad (193a)$$

Это выражение имеет обычный вид полного сопротивления $Z = S(b_1 + i\omega a_1)$; в первом члене (т. е. в b_1) можно пренебречь величиной $\frac{J_1(2kR)}{kR}$ при большом kR (а оно велико в действительности); таким об-

разом, сопротивление излучения для поршня при высоких частотах равно $\pi R^2 \cdot \rho c$, что совпадает с теорией § 41¹⁾.

Свойствами и применимостью функций $J_1(2kR)$ и $K_1(2kR)$ много занимался Рэлей (loc. cit.), будем его данные считать бесспорными. Для наших целей достаточно ограничиться несколькими членами ряда

$$\left. \begin{aligned} J_1(z) &= \frac{z}{2} \left[1 - \frac{z^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 2^2 \cdot 6} - \frac{z^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^2 \cdot 6 \cdot 8} + \dots \right], \\ 1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} &= \frac{k^2 R^2}{2} - \frac{k^4 R^4}{2^2 \cdot 3} + \frac{k^6 R^6}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} - \frac{k^8 R^8}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

и

$$K_1(z) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{3^2 \cdot 5} + \frac{z^7}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right). \quad (195)$$

В сочинениях о Бесселевых функциях показано, что для больших значений аргумента

$$K_1(z) \Big|_{z \text{ велико}} = \frac{2z}{\pi}. \quad (195a)$$

Теперь мы можем исследовать реакцию среды на поршень при низких частотах, т. е. в наиболее важном в общей акустике случае. Поскольку kR мало, нам достаточно взять во втором ряду выражений (194) только первый член; это дает для коэффициента активного сопротивления

$$Sb_1 = \pi R^2 \cdot \rho c \cdot \frac{k^2 R^2}{2} = \frac{\rho c \cdot k^2 (\pi R^2)^2}{2\pi} = \frac{\rho \omega^2 S^2}{2\pi c}. \quad (196)$$

Интересно сравнить это выражение с тем, что мы получили бы для половины пульсирующей сферы (§ 37), если она излучает в полубезграничную среду. В этом случае, полагая $S = 2\pi r_0^2$, мы имели бы вместо (175)

$$Sb_1 = \rho c \cdot \frac{k^2 S^2}{2\pi} = \frac{\rho \omega^2 S^2}{2\pi c}. \quad (175a)$$

Таким образом, поскольку дело идет о сопротивлении излучения, поршень эквивалентен при низких частотах пульсирующей полусфере равной поверхности. При высоких частотах в обоих случаях активное сопротивление равно ρc на единицу поверхности.

Тем не менее при низких частотах коэффициент добавочной массы, появляющейся от действия среды, несколько больше для поршня равной поверхности, чем для пульсирующей полусферы. Для последней в § 37 мы вывели выражение

$$Sa_1 = 2\pi r_0^2 \cdot r_0 \rho = \rho \frac{S^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (197)$$

Для поршня при малых частотах на основании (193a) и (195) имеем:

$$i\omega a_1 S = \frac{i\omega \rho \pi}{2k^3} \cdot \frac{2(2kR)^3}{3\pi} = i\omega \rho \cdot \frac{8}{3} R^3, \quad (198)$$

т. е.

$$Sa_1 = \pi R^2 \cdot \frac{8R}{3\pi} \cdot \rho = \rho \cdot \frac{8}{3} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{3/2}. \quad (198a)$$

¹⁾ Активная и реактивная составляющие сопротивления поршня изображены как X и Y (функции от kR) на рис. 19, § 46.

Числовые коэффициенты в (197) и (198a) относятся друг к другу приблизительно как 0,40:0,48; таким образом, при низких частотах добавочная масса от влияния полубезграничной среды на 20% больше для плоского диска, чем для полусферы равной поверхности.

При высоких частотах добавочная масса становится исчезающе малой. Пользуясь снова соотношением (195a) и мнимым членом (193a), имеем для поршня

$$i\omega a_1 S = i \frac{\omega \rho \pi}{2k^3} \cdot \frac{4kR}{\pi},$$

т. е. так как

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$Sa_1 = \frac{2\rho}{k^2} R = \frac{\rho\lambda^2}{2\pi^2} \sqrt{\frac{S}{\pi}}. \quad (199)$$

Соответствующее выражение для пульсирующей полусферы согласно (174) при малых λ будет

$$Sa_1 = \frac{\rho\lambda^2}{2\pi} r_0 = \frac{\rho\lambda^2}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{2\pi}}. \quad (174b)$$

Читатель может легко убедиться, что при высоких частотах коэффициентами инерции во всяком случае можно пренебречь по сравнению с сопротивлением излучения $Sb_1 = \rho c S$.

Полезность полученных результатов выявится сразу же. Их можно применить прежде всего для определения сопротивления полубезграничной среды на конце трубы круглого поперечного сечения, снабженной плоским фланцем, простирающимся в бесконечность. Внутри трубы вблизи ее конца волны плоские; можно считать (без большой ошибки), что они расходятся в среду точно таким образом, как волны от поршня, колеблющегося в конце трубы. Если теперь отбросить поршень, то для того, чтобы движение продолжалось, к круглому отверстию должна быть приложена сила, равная произведению скорости в данной точке на определенное нами сопротивление, именно $S(b_1 + i\omega a_1)$ (представляющее собой реакцию среды на поршень). Погрешность от того, что мы приняли распределение скорости в отверстии, аналогичным тому, которое получается при наличии здесь поршня, является малой величиной второго порядка.

§ 43. Поправки на влияние концов трубы; сопротивление круглого отверстия.

Прежде чем ввести в теорию трубы, открытой на конце, поправку на сопротивление среды на конце, определим, что предполагает такая поправка. На конце появляются добавочные затухания (вследствие излучения) и инерция (вследствие расхождения волн); рассмотрим трубу как простую колебательную систему. Легко видеть, что требуется значительное увеличение рассеяния, чтобы повлиять на частоту собственных колебаний, в то время как всякое увеличение инерции непосредственно влечет за собой понижение собственной частоты. Так как собственные частоты конечной трубы обратно пропорциональны ее длине, то действие сопротивления на конце (т. е. появление добавочной инерции) следует рассматривать как небольшое увеличение действующей длины трубы. То же заключение может быть выведено на основании размерностей.

Из теории трубы (§ 33) мы знаем, что скорость частиц для трубы, открытой в $x = 0$ и закрытой в точке $x = l$.

$$\dot{\xi}(x) = \dot{\xi}_0 \left(\cos \frac{\omega x}{c} \right) e^{i\omega t}, \text{ если } \cos \frac{\omega l}{c} = 0, \quad (137, 138),$$

где $\dot{\xi}_0$ — скорость при $x = 0$. В пределах некоторого малого элемента длины δl , отсчитанного внутрь отверстия трубы, изменением скорости можно пренебречь, и, следовательно, кинетическая энергия в таком отрезке трубы будет

$$\delta T = \frac{1}{2} \rho S \delta l \cdot \dot{\xi}_0^2,$$

если $S = \pi R^2$ — сечение трубы. Кинетическая энергия в области, непосредственно прилегающей к отверстию трубы снаружи, согласно (198a) при низких частотах равна:

$$T' = \frac{1}{2} S a_1 \dot{\xi}_0^2 = \frac{1}{2} S \cdot \frac{8R\rho}{3\pi} \cdot \dot{\xi}_0^2.$$

Полная кинетическая энергия в рассматриваемой области вблизи отверстия равна поэтому:

$$\delta T + T' = \frac{1}{2} \rho S \dot{\xi}_0^2 \left(\delta l + \frac{8R}{3\pi} \right). \quad (200)$$

Таким образом, в предположении неизменной скорости вблизи отверстия действие добавочной массы от влияния среды как бы увеличивает длину трубы на величину $\alpha = \frac{8R}{3\pi}$. Поэтому действующая длина трубы равна $(l + \alpha)$ и собственные частоты определяются из

$$\cos \frac{\omega(l + \alpha)}{c} = 0, \text{ т. е. } \frac{\omega(l + \alpha)}{c} = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 3, 5, \dots), \quad (201)$$

что походит на уравнения (137). Очевидно, что гармонические соотношения между обертонами низкой частоты не нарушаются; однако, с повышением частоты радиус трубы становится сравнимым с длиной волны и (198a) перестает быть справедливым. При более высоких обертонах α уменьшается и гармоническое соотношение между ними нарушается.

Если отверстие более узко, чем главный трубопровод, то теория усложняется; однако, результат можно предвидеть на основании общих положений. Вблизи отверстия кинетическая энергия увеличится; соответственно увеличится добавочная масса и получится возросшая концевая поправка; однако, кроме того, в трубе для волн, приходящих к узкому концу, появится большой коэффициент отражения.

Случай бесфланцевой трубы вносит также трудности в определение концевой поправки от инерции. На основании опытов с фланцевыми и бесфланцевыми трубами Рэлей (II, § 314) нашел, что фланец увеличивает концевую поправку, примерно, на $0,22R$; вычитая эту величину из $\alpha = \frac{8R}{3\pi} = 0,85R$, получаем, что концевая поправка для бесфланцевой трубы равна приблизительно $0,6R$; это подтверждается выводом Блэкли (Blaikley), также цитируемого Рэлеем, именно $0,576R$.

Сравнивая сопротивления излучения поршня и полусферы при низкой частоте [уравнения (196) и (175a)], мы нашли, что форма источника большого значения не имеет, поскольку для излучения в полубезграничную среду в обоих случаях результаты оказались одинаковыми. Поэтому мы были вправе предположить, что сопротивление излучения для конца бес-

фланцевой трубы при низких частотах равно сопротивлению излучения одиночного точечного источника, как было сделано в (175); оно, следовательно, для полного сферического излучения в два раза меньше, чем для излучения в полубезграничную среду. Важно ясно представить себе, что сущность полезного действия генерации звуковых волн заключается в концентрации излучения в одном направлении.

Заслуживает внимания еще одно применение реакции инерции на поршень, хотя точных результатов здесь мы не получим. В теории резонаторов мы установили, что проводимость круглого отверстия в тонкой стенке равна $2R$, причем коэффициент массы равен:

$$Sa_1 = \frac{\rho S^2}{2R} = \frac{\rho \pi^2 R^3}{2}. \quad (202)$$

Точный вывод этого результата не является предметом простой теории; читатель, однако, возможно станет более доверять последней формуле, если сможет получить хотя бы грубое подтверждение ее, основанное на простейших положениях. Представим себе в отверстии невесомый плоский поршень, в результате наличия которого скорость во всех частях отверстия будет одинаковой. Складывая реакции инерции на обе стороны поршня, равные во всех отношениях, получаем удвоенный коэффициент (198), именно:

$$Sa_1 = \rho \frac{16}{3} R^3. \quad (202a)$$

Коэффициенты (202) и (202a) относятся как 4,93:5,32 или разнятся на 8%. Несовпадение в значительной мере обусловлено тем, что в действительности скорость в разных точках отверстия неодинакова; более точная теория учитывает это обстоятельство. Читателя, интересующегося этой более точной теорией, мы опять-таки (как в § 24) отошлем к труду Рэля (Rayleigh, II, § 306; *ibid.*, Appendix A).

Поправка, определенная точным способом для открытого конца трубы с фланцем, оказалась равной $\alpha = 0,82R$. Тогда коэффициент массы для круглого отверстия с точностью до 5% равен удвоенной добавочной массе на конце с фланцем трубы одинакового поперечного сечения.

§ 44. Характеристики рупоров; конические рупоры.

Наша теория достигла такой точки, когда, если бы рупоры не применялись, пришлось бы их изобрести, чтобы показать практическое применение изложенных нами принципов звукового излучения. Читателю, понявшему теорию, должно быть ясно, что действие обыкновенного рупора двояко. В своей узкой части, связанной с громкоговорящим телефоном или другого вида звуковым генератором, источник должен работать с максимальной эффективностью, так как излучение должно происходить в форме плоских волн, ибо при этом сопротивление излучения поршневого источника наибольшее. Назначение большого диаметра открытого конца состоит в том, чтобы заменить источник (имеющий весьма малую площадь) большим, по возможности, плоским источником той же мощности, так как он лучше приспособлен для излучения в безграничную среду. Делая открытый конец рупора достаточно широким без нарушения „плоскости“ волн внутри рупора, мы не только уменьшаем реактивное сопротивление массы среды на открытом конце, но также увеличиваем сопротивление излучения до значения, близкого к таковому для плоских волн. В правильно устроенном рупоре отражение от открытого конца

происходит только при низких частотах; передача в открытое пространство происходит без серьезных потерь, причем стоячие волны или собственные колебания внутри самого рупора, дающие нежелательные явления резонанса, сведены к минимуму.

Начала теории рупора заложены Рэлеем (II, § 265), рассматривавшим рупор как трубу с переменным сечением; любопытно отметить, что в развитии рупоров непосредственный опыт сыграл гораздо большую роль, чем выводы классической теории.

Если S обозначает переменное сечение трубы (функция от x расстояния вдоль оси), то уравнение непрерывности (150) пишется:

$$S \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (S \dot{\xi}) = 0, \quad (203)$$

и так как (149) и (146) дают

$$\dot{\varphi} = c^2 s \text{ и } \dot{\xi} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

то уравнение распространения имеет вид:

$$\ddot{\varphi} - \frac{c^2}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0. \quad (204)$$

Его можно переписать в форме

$$\ddot{\varphi} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\lg S). \quad (204a)$$

Это уравнение составляет основу теории Вебстера (A. G. Webster, Proc. Nat. Acad. Sci., 5 (1919), стр. 275), и им часто пользовались позднейшие авторы. Вебстер первый ввел представление об акустическом сопротивлении, которым он пользовался еще до 1919 г.; названная выше статья важна как исходная точка вообще для теории рупоров.

Сначала рассмотрим рупор в форме конуса, причем началом будем считать его вершину; тогда $S = \Omega x^2$, если Ω — телесный угол конуса.

Следовательно, $\lg S = \lg \Omega + 2 \lg x$ и $\frac{\partial}{\partial x} (\lg S) = \frac{2}{x}$,

поэтому (204a) имеет в данном случае вид:

$$\ddot{\varphi} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2c^2}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ или } \frac{\partial^2}{\partial t^2} (x\varphi) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x\varphi), \quad (205)$$

что аналогично (153a). Согласно принципов, положенных в основу решения (153a) для периодического движения ($\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$) потенциал скорости равен:

$$\varphi = \frac{A'}{x} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)} + \frac{B'}{x} e^{i\omega \left(t + \frac{x}{c}\right)}. \quad (206)$$

По аналогии с (160) для волны, расходящейся от источника напряженности A , расположенного в вершине, имеем

$$\varphi \frac{A}{\Omega x} e^{i(\omega t - kx)}, \quad (206a)$$

так как вместо угла 4π излучение заполняет собою телесный угол Ω . Уравнение (206a) выведено Рэлеем (II, § 280) первоначально для того,

чтобы показать, каким образом энергия источника концентрируется мегафоном. Очевидно, что если конический рупор должен наилучшим образом усиливать эффективность излучения источника, то телесный угол Ω должен по необходимости быть малым. При этом конечный конический рупор будет иметь сравнительно узкий раструб и будет поэтому, вследствие отражения у открытого конца, обладать резонансной характеристикой, не слишком сильно отличающейся от характеристики трубы однородного сечения. Выражение действующей длины трубы будет иметь концевую поправку (зависящую от формы отверстия и частоты), сходную с поправкой для цилиндрической трубы. Поэтому полезность такой формы рупора ограничена. Можно, оказывается, установить важные принципы конструирования рупоров, если изучить весьма длинный конический рупор; обрежем этот рупор на переменном, от нас зависящем, расстоянии x_1 от вершины; в отверстии при $x = x_1$ будем помещать поршневой источник постоянной напряженности. Такая система эквивалентна коническому элементу пульсирующей сферы (§ 37). Полагая $S_1 = \Omega x_1^2$, имеем напряженность источника $A = \dot{\xi}_0 S_1 = \Omega x_1^2 \dot{\xi}_0$; согласно (171), потенциал скорости в какой-либо точке $x > x_1$, пренебрегая потерями на трение, равен:

$$\varphi = \frac{A}{\Omega x} \cdot \frac{(1 - ikx_1)}{1 + k^2 x_1^2} \cdot e^{i\omega t} e^{ik(x_1 - x)}. \quad (207)$$

Будем рассматривать только вещественную часть выражения, т. е. появляющуюся от колебания $A \cos \omega t$ у источника. Избыточное давление в удаленной точке x равно вещественной части выражения:

$$p = p\varphi = \frac{A\rho\omega}{\Omega x} \frac{(kx_1 + i)}{(k^2 x_1^2 + 1)} e^{i\omega t} e^{ik(x_1 - x)}, \quad (208)$$

то есть

$$p = \frac{A\rho\omega}{\Omega x} \left(\frac{kx_1 \cos[\omega t - k(x - x_1)] - \sin[\omega t - k(x - x_1)]}{(k^2 x_1^2 + 1)} \right)$$

или

$$p = \frac{A\rho\omega}{\Omega x \sqrt{k^2 x_1^2 + 1}} \cos[\omega t - k(x - x_1) + \theta] \quad (208a)$$

$$\theta = \arctg \frac{1}{kx_1}.$$

Интенсивность равна (так как $S = \Omega x^2$):

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{p_{\text{max}}^2}{2\rho c} = \frac{A^2 \rho c}{2S\Omega} \frac{k^2}{(1 + k^2 x_1^2)}. \quad (209)$$

Для длинного конического рупора, отверстие S которого достаточно велико, чтобы сопротивление было равно сопротивлению бесконечной среды, мы вправе вывести следующие заключения:

1. При источнике заданной напряженности, помещенном в определенном месте $x = x_1$, интенсивность вблизи устья рупора меняется обратно пропорционально квадрату угла конуса.

2. При низких частотах (т. е. при $kx_1 < 1$) интенсивность возрастает с квадратом частоты.

3. При высоких частотах интенсивность асимптотически приближается к величине, обратно пропорциональной площади (Ωx_1^2) сечения конуса в котором помещен источник.

4. Чем больше может быть сделано x_1 , тем менее искаженную передачу на всех частотах может давать рупор. Интерпретация рис. 16,

показывающего изменение интенсивности с частотой при двух значениях x_1 , для случая длинного рупора предоставляется читателю.

Конструкция конического рупора определяется двумя основными факторами. Длина должна быть так велика, как только возможно на практике, что дает возможность иметь в раструбе большую площадь S при малом угле Ω ; обычно берут для $S\Omega$ некоторую разумно ограниченную величину. При большой S уменьшается резонанс от отражения по ранее изложенным причинам. Вдобавок при большой длине наиболее неприятные собственные колебания будут происходить при более низкой частоте, при которой их влияние менее вредно. Таким образом, все соображения об эффективности требуют длинного рупора в случае его конической формы.

Вторым важным фактором является величина x_1 ; она определяется в результате компромисса, зависящего от того, насколько мы можем

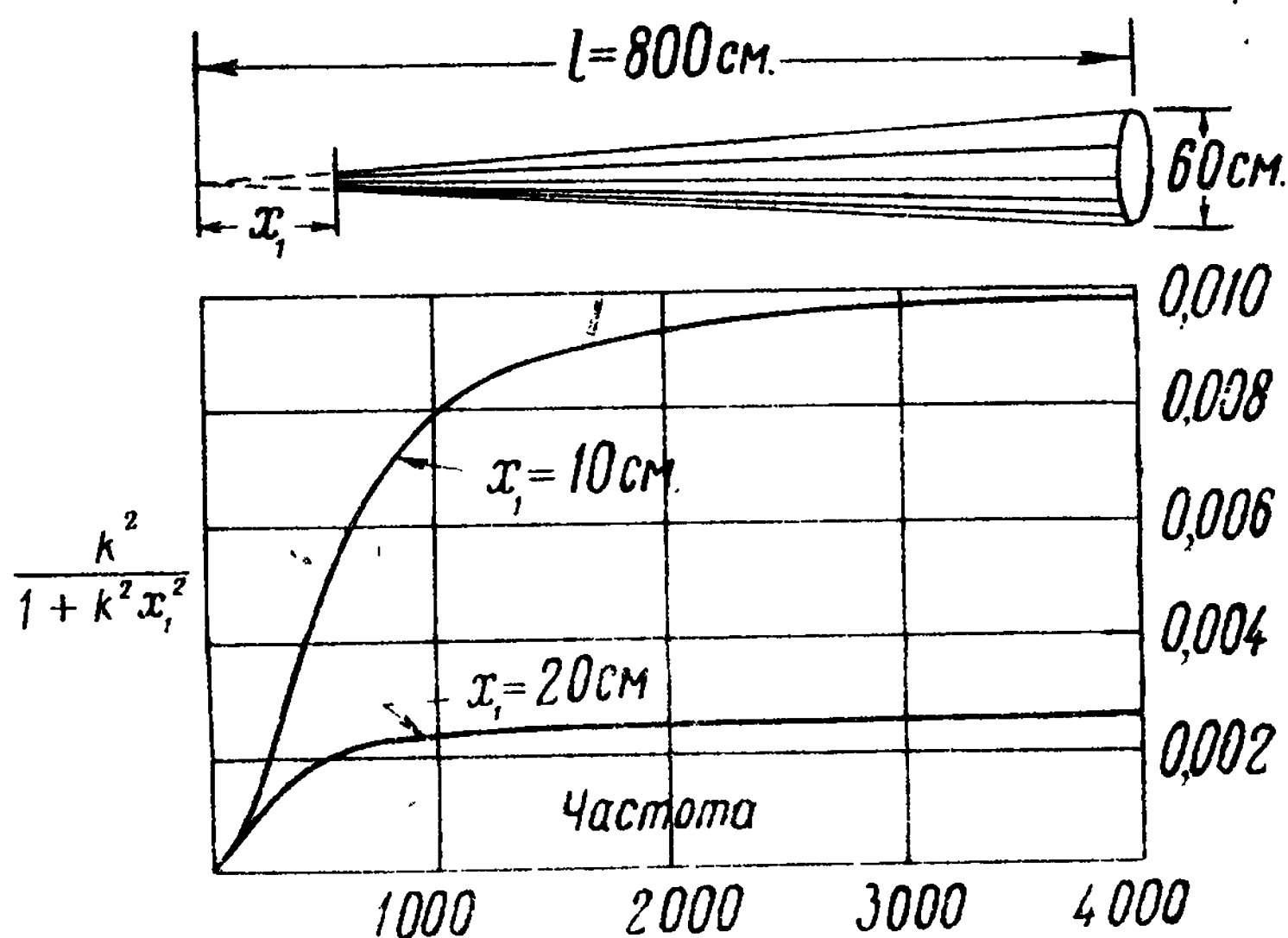


Рис. 16. Относительная интенсивность у выходного отверстия конического рупора (отражение не принято во внимание).

пожертвовать интенсивностью на высоких частотах ради расширения рабочего диапазона в сторону возможно более низких частот и получения, таким образом, равномерной частотной характеристики.

Важной для практики задачей является надлежащее сопряжение громкоговорящего элемента с рупором. Это — специальная тема и в наше изложение не входит; все же упомянем об одном важном обстоятельстве: если рупор сконструирован так, что излучает должным образом в широком диапазоне частот (при источнике с одинаковой при всех частотах напряженностью), то можно с полным основанием считать, что он будет действовать удовлетворительно, если только колебательная система правильно к нему подобрана. Затухание, вносимое рупором вследствие излучения, обычно бывает достаточным, чтобы сгладить не слишком сильно выраженный резонанс в движущей системе. С другой стороны, резонанс в движущей системе может быть использован для улучшения передачи в области низких частот. Этот принцип применен в поршневом безрупорном громкоговорителе; однако, его можно применить также к звуковым генераторам ¹⁾, снабженным рупорами. Причина плохой передачи, обычно имеющей место

¹⁾ Указания на громкоговорители различных конструкций, см. приложение В.

при низких частотах, не обязательно лежит в вибраторах или рупорах, хотя нерациональная их конструкция может это свойство усугубить; основной трудностью (с которой впервые мы встретились при изучении пульсирующей сферы) является возбуждение среды при низких частотах, если у источника возможно расхождение излучения.

Выводы настоящего параграфа соответствуют результатам, полученным Келлогом (E. W. Kellog, Gen. Elec. Rev., XXVII, Aug. 1924, стр. 556).

Теория конического рупора конечной длины изложена Вебстером в уже упоминавшейся статье; она была в дальнейшем несколько развита Стюартом (Phys. Rev., XVI, октябрь, 1920, стр. 313).

§ 45. Рупоры с сечением, меняющимся по экспоненциальному закону.

Рупор с поперечным сечением, возрастающим по закону показательной функции, заслуживает вследствие своей большой полезности особого внимания.

Считая узкий конец за начало, положим $S = S_1 e^{mx}$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lg S) = m$$

и для периодического движения ($\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$) уравнение (204a) приобретает вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} m + \frac{\partial}{\partial x} + k^2 \right) \varphi = 0; \quad \left(k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right). \quad (210)$$

Решение этого уравнения методом § 3 дает

$$\varphi = (A_1 e^{\mu_1 x} + B_1 e^{\mu_2 x}) e^{i\omega t}, \quad (211)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= -\frac{m}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{4k^2 - m^2} = -\alpha + i\beta, \\ \mu_2 &= -\frac{m}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{4k^2 - m^2} = -\alpha - i\beta, \end{aligned} \right\} \quad (212)$$

по аналогии с уравнением (5). Поэтому потенциал скорости есть вещественная часть выражения

$$\varphi = e^{-\alpha x} [A_1 e^{-i\beta x} + B_1 e^{+i\beta x}] e^{i\omega t}, \quad (213)$$

т. е. для движения волн в обоих направлениях

$$\varphi = e^{-\alpha x} [A_1 \cos(\omega t - \beta x) + B_1 \cos(\omega t + \beta x)]. \quad (213a).$$

В случае длинного рупора, пренебрегая отражением на открытом конце (предполагается, что последний имеет большую площадь поперечного сечения) для расходящейся волны мы имели бы

$$\varphi = A_1 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x). \quad (213b)$$

Данное уравнение в кинематическом отношении сходно с (124) § 32; разница лишь в том, что затухание в (213b) вызывается не трением (которым мы пренебрегали), а убыванием давления при заполнении рупора расходящейся волной. Как в (124), так и в (213b) затухание не только уменьшает амплитуду, но и меняет слегка скорость распространения. При

рассмотрении (124) это явление не учитывалось, поскольку при изучении труб оно значения не имеет; здесь же пренебречь им мы не имеем права. При отсутствии затухания скорость распространения равнялась бы $\frac{\omega}{k} = c$; однако, при условиях, существующих в рупоре при непрерывном волновом движении, имеет место

$$c' = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{4k^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{4k^2}}}. \quad (214)$$

Таким образом, потенциал скорости имеет несколько опережающую фазу по сравнению с потенциалом скорости плоской волны в предположении отсутствия рассеяния. Продифференцировав φ по x и по t , убеждаемся, что скорость и избыточное давление уже сказываются не в фазе, в противоположность случаю плоских волн (§ 31).

Следовательно, при пользовании этими величинами для нахождения интенсивности излучения надо быть осмотрительным.

Сравним теперь изменение интенсивности с частотой у раструба длинного „экспоненциального“ рупора с коническим рупором, имеющим такое же отношение начального сечения к конечному.

В этой задаче удобно выражать фазу в функции скорости, поскольку скорость вначале мы считаем величиной заданной. Попрежнему имеем

$$\dot{\xi}_{x=0} = \frac{A}{S_1} \cos \omega t,$$

если через A обозначить напряженность источника.

Можно показать, что создаваемый этим источником потенциал скорости равен:

$$\varphi = -\frac{Ae^{-\alpha x}}{S_1 k^2} [\alpha \cos(\omega t - \beta x) + \beta \sin(\omega t - \beta x)] \quad (215)$$

и скорость в произвольной точке x :

$$\dot{\xi} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Ae^{-\alpha x}}{S_1} \cos(\omega t - \beta x), \quad (216)$$

так как согласно (212) $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$. Решения, очевидно, удовлетворяют граничным условиям. Избыточное давление равно:

$$p = \rho \dot{\varphi} = \frac{\rho \omega A e^{-\alpha x}}{S_1 k^2} [-\alpha \sin(\omega t - \beta x) + \beta \cos(\omega t - \beta x)]. \quad (217)$$

Мы не будем делать предположения (хотя, как окажется, с некоторой оговоркой оно было бы справедливо), что интенсивность, попрежнему, как и для плоских и сферических волн, выражается формулой (164а). Согласно основных положений интенсивность определяется

$$\begin{aligned} \left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} &= \dot{\xi} \cdot p = \\ &= \frac{\rho \omega A^2 e^{-2\alpha x}}{k^2 S_1^2} [\beta \cos^2(\omega t - \beta x) - \alpha \sin(\omega t - \beta x) \cos(\omega t - \beta x)] \end{aligned}$$

или, беря среднее значение

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \overline{\xi \cdot p} = \frac{\rho c A^2 e^{-2\alpha x} \cdot \beta}{2k S_1^2}, \quad (218)$$

так как $\frac{\omega}{k} = c$.

Мы уже отметили выше зависимость $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$, поэтому можно положить $\alpha = k \sin \theta$ и $\beta = k \cos \theta$.

Обычно, α — величина малая, исключая случаев весьма низких частот; ее можно считать мерой разности фаз между скоростью и избыточным давлением. Величину $\cos \theta = \frac{\beta}{k}$ можно рассматривать как коэффициент мощности. Теперь заметим, что мы получили бы также уравнение (218), если бы написали вместо (217) эквивалентную формулу:

$$p = \frac{\rho \omega A e^{-\alpha x}}{S_1 k} \cos(\omega t - \beta x + \theta), \quad (217a)$$

и воспользовавшись для интенсивности соотношением, сходным с (164a)

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{(p_{\text{max}})^2}{2\rho c'},$$

где $c' = \frac{c}{\cos \theta}$, как и в (214).

Вид уравнения (218) следует несколько изменить для сравнения с соответствующим уравнением (209), полученным для конического рупора. Имеем

$$e^{-2\alpha x} = e^{-mx} = \frac{S_1}{S} \quad \text{и} \quad \beta = k \sqrt{1 - \frac{m^2}{4k^2}}. \quad (219)$$

Подставляя в (218), получаем

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{\rho c A^2}{2SS_1} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^2}{4\omega^2}}. \quad (218a)$$

Важная роль величины β в теории экспоненциального рупора очевидна. Для некоторой частоты (именно, когда $2\omega = mc$) $\beta = 0$; при частотах ниже этой критической частоты рупор ничего не передает, иными словами, ведет себя, как фильтр. При возрастании частоты выше критической β быстро нарастает, и $\cos \theta$ асимптотически приближается к единице.

Замечая, что $\Omega = \frac{S_1}{x_1^2}$, можно уравнение (209) для конуса переписать в виде:

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{\rho c A^2}{2SS_1} \frac{k^2 x_1^2}{(1 + k^2 x_1^2)}. \quad (209a)$$

Это позволяет произвести непосредственное сравнение, обоих типов рупоров, если A , S и S_1 в обоих случаях одинаковы. Превосходство экспоненциального рупора (кроме области частот ниже критической), если оно не сразу очевидно, можно пояснить на примере. На рис. 17 показаны две частотные характеристики, соответствующие (218a) и (209a); длина рупоров взята равной 192 см и отношение $\frac{S}{S_1} = (25)^2 = 625$. Отсюда мера сужения экспоненциального рупора будет $m = 0,033$; другая необходимая для вычислений величина $x_1 = 8$ см, она измеряется от вершины конуса до точки, где сечение равно S_1 . Остальное ясно из рисунка.

Вывод относительно превосходства экспоненциального рупора объясняет его широкое распространение в громкоговорящих устройствах. Основные уравнения экспоненциального рупора были даны Вебстером (loc. cit.). Из более поздних авторов назовем Hanna и Slepian (Trans. A. I. E. E., 43, 1924, стр. 393), а также Н. С. Harrison (British Patent, № 213, 528, 1925). В статье Goldsmith и Minton о рупорах (Proc. Inst. Rad. Eng. Aug., 1924, стр. 423) авторы, повидимому, допускают ошибку (стр. 454), находя, что данный конический рупор для некоторых частот выше критической имеет лучшую характеристику передачи, чем соответствующий экспоненциальный рупор. С таким выводом мы согласиться не можем.

Настоящий параграф мы закончим цитатой из труда Фландерса (P. B. Flanders), много занимавшегося исследованием рупоров. Вопрос

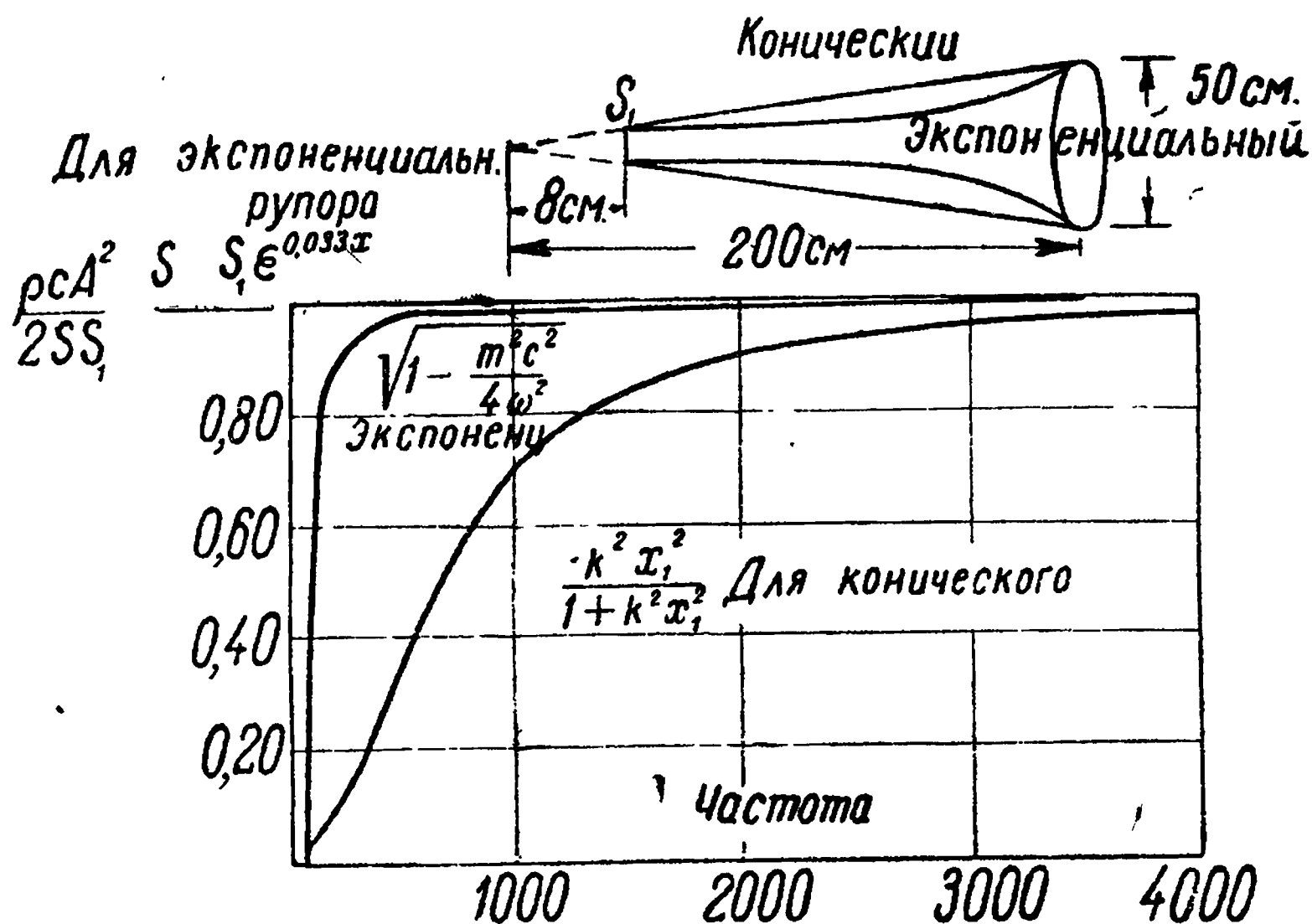


Рис. 17. Сравнение конического и экспоненциального рупоров, имеющих одинаковые входные и выходные отверстия

касается снабжения рупором короткой трубки, ведущей от диафрагмы громкоговорителя.

„Пренебрегая явлениями отражения, прибавление рупора не обуславливает возрастания предельного сопротивления на конце приемного отверстия. Наличие рупора вызывает то, что предельная величина сопротивления достигается при более низкой частоте; чем ниже эта частота, тем, конечно, рупор лучше. Сопротивление „выхода“ 0,7-дюймового отверстия в бесконечной стенке достигает 80% своей предельной величины при 9300 герц; один из конических рупоров дает тот же результат при 4200 герц; в то же время у экспоненциального рупора 80% предельного сопротивления достигается уже при 250 герц. Этим объясняется в известной мере большое превосходство экспоненциального рупора над коническим“.

§ 46. Экспоненциальный рупор конечных размеров.

Чтобы сделать теорию рупоров применимой на практике, ее необходимо развить в первую очередь для рупоров конечной длины; приступая к этой задаче, возьмем для примера экспоненциальный рупор вследствие его преимуществ.

Метод исследования основан на том, которым мы уже пользовались для исследования трубы (§ 32). Он прост сам по себе, но требует в данном случае кропотливых вычислений; некоторое упрощение возможно при пользовании методами сопротивлений, хорошо известными из теории электрических цепей¹⁾.

Сначала найдем главные сопротивления, характерные для конечных и бесконечных рупоров, и затем заменим на основе вычисленных постоянных данный рупор некоторой эквивалентной схемой. Тогда можно будет найти режим работы рупора, помещенного между двумя данными сопротивлениями, когда на одном конце действует заданная движущая сила. Необходимо также сделать некоторые допущения при учете сопротивления среды на широком (открытом) конце, что не трудно, так как вопрос разбирался в начале настоящей главы.

Согласно ранее выведенных общих решений (216) и (217a) можно скорость и избыточное давление представить в виде:

$$\dot{\xi} = e^{-\alpha x} [Ae^{-i(\beta x + \theta)} - Be^{i(\beta x + \theta)}] e^{i\omega t} \quad (220)$$

и

$$p = \rho c e^{-\alpha x} [Ae^{-i\beta x} + Be^{i\beta x}] e^{i\omega t}, \quad (221)$$

где, как и ранее $\theta = \arctg \frac{\alpha}{\beta}$ — угол отставания скорости от давлений для волны, распространяющейся в положительном направлении, т. е. в направлении увеличения поперечного сечения рупора. Уравнения (220) и (221) предусматривают все возможные волны в обоих направлениях, причем θ для распространения в отрицательном направлении меняет знак.

Для сопротивления бесконечного рупора в положительном направлении можем сразу писать:

$$Z = \frac{Sp}{\dot{\xi}} = \rho c S e^{i\theta} = \frac{\rho c S}{k} (\beta + i\alpha) \quad (222)$$

и в отрицательном направлении (так как тогда s отрицательно).

Пусть теперь рупор оканчивается при $x = 0$ и $x = l$ поршневыми сопротивлениями Z_0 и Z_l соответственно.

Таким образом, граничные условия будут

$$\text{при } x = 0 \quad Z_0 \dot{\xi}_1 + p_1 S_1 = \Psi_0 e^{i\omega t}, \quad (223a)$$

$$\text{при } x = l \quad Z_l \dot{\xi}_2 - p_2 S_2 = 0, \quad (223b)$$

где $\Psi_0 e^{i\omega t}$ — приложенная сила и индексы 1, 2 относятся к местным значениям скорости, давления и сечения.

Применяя к уравнениям (220) и (221) условие (223b), находим соотношение:

$$B = A e^{-i2\beta l} \left[\frac{Z_l e^{-i\theta} - \rho c S_2}{Z_l e^{i\theta} + \rho c S_2} \right]. \quad (224)$$

Исключая B из (224) и (223a), имеем

$$A = \frac{[Z_l e^{i\theta} + \rho c S_2] \Psi_0}{2D e^{-i\beta l}}, \quad (225)$$

¹⁾ Метод приложения теории электрических цепей к рупорам берет свое начало от Р. В. Flanders и Д. А. Quarles из Лаборатории Телефонной Компании Белла. Преимущества метода станут ясны из сравнения текста с исследованием рупора Вебстером, цитированным в § 44.

где

$$2D = (Z_0 Z_l + \rho^2 c^2 S_1 S_2) (e^{i\beta l} - e^{-i\beta l}) + \\ + \rho c [Z_0 S_2 (e^{i(\beta l - \theta)} + e^{-i(\beta l - \theta)}) + Z_l S_1 (e^{i(\beta l + \theta)} + e^{-i(\beta l + \theta)})],$$

т. е.

$$D = (Z_0 Z_l + \rho^2 c^2 S_1 S_2) i \sin \beta l + \\ + \rho c [Z_l S_1 \cos(\beta l + \theta) + Z_0 S_2 \cos(\beta l - \theta)]. \quad (226)$$

Также имеем

$$B = \frac{e^{-i\beta l} [Z_l e^{-i\theta} - \rho c S_2] \Psi_0}{2D}. \quad (227)$$

Подставляя значения A и B в (220) и (221), имеем для распределения скорости и давления в рупоре

$$\dot{\xi} = \frac{e^{-ax}}{D} (Z_l \cdot i \sin \beta (l-x) + \rho c S_2 \cos [\beta (l-x) - \theta]) \Psi_0 e^{i\omega t} \quad (228)$$

и

$$p = \frac{\rho c e^{-ax}}{D} (\rho c S_2 \cdot i \sin \beta (l-x) + Z_l \cos [\beta (l-x) + \theta]) \Psi_0 e^{i\omega t}. \quad (229)$$

Теперь можно построить эквивалентную T -образную схему рупора, считая, что он обладает (в положительном направлении волны) коэффи-

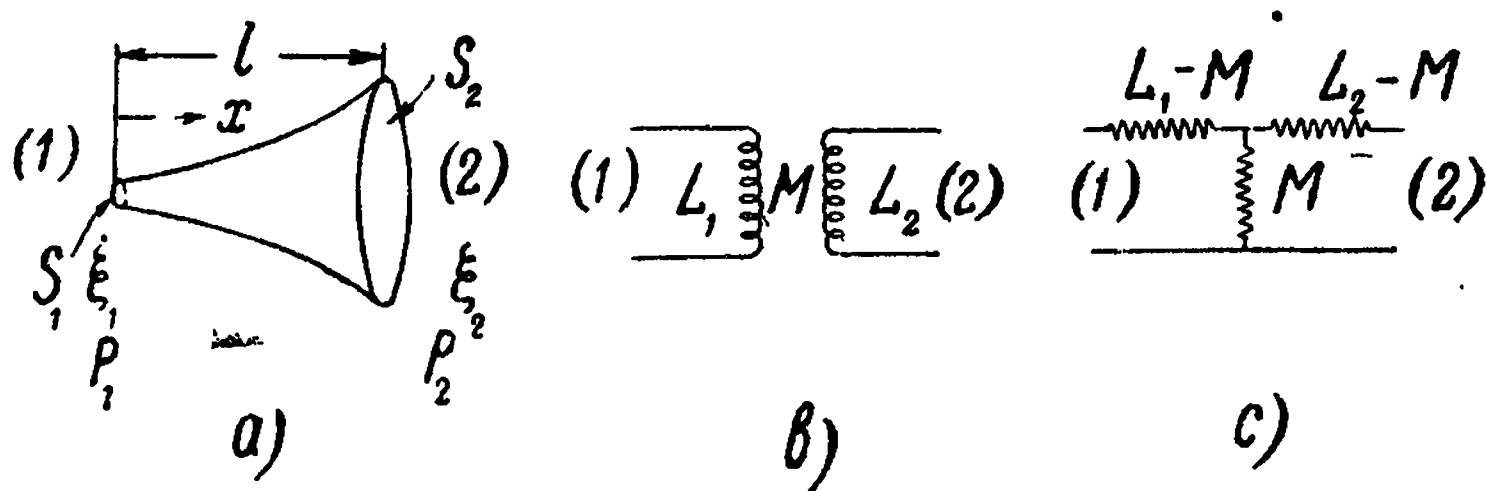


Рис. 18. Конечный рупор и эквивалентная схема.

циентами чистой инерции $L_1 M$, и L_2 так же, как обыкновенный трансформатор. Эти соотношения будут ясны, если обратиться к рис. 18. У трансформатора $i\omega L_1$ является сопротивлением первичной цепи при разомкнутой вторичной, этому соответствует сопротивление рупора в точке (1) при наглухо замкнутом (2), т. е. когда $\dot{\xi}_2 = 0$. Аналогично определяется $i\omega L_2$. Взаимное сопротивление $M_{12} = i\omega M$ есть отношение силы $(p_2 S_2)$ к скорости $\dot{\xi}_1$ при замкнутом в S_2 рупоре. M также определяется простой формулой

$$M = \sqrt{L_2 \left(L_1 - \frac{Z_1'}{i\omega} \right)}, \quad (230)$$

где Z_1' есть сопротивление в (1) при (2) электрически короткозамкнутом или в акустическом случае, при $Z_l = 0$.

Для определения L_1 положим в (228) $Z_l = \infty$; тогда при $x=0$

$$\dot{\xi}_1 = \frac{i \sin \beta l \cdot \Psi_0 e^{i\omega t}}{Z_0 \cdot i \sin \beta l + \rho c S_1 \cos(\beta l + \theta)}. \quad (231)$$

Поэтому сопротивление в точке возбуждения равно:

$$\frac{\Psi_0}{(\dot{\xi}_1)_{\max}} = Z_0 \frac{\rho c S_1 \cos(\beta l + \theta)}{i \sin \beta l}.$$

Вычитая сопротивление поршня Z_0 , имеем для сопротивления самого рупора

$$Z_1 = i\omega L_1 = \frac{ipcS_1}{k} (\alpha - \beta \operatorname{ctg} \beta l), \quad (232)$$

так как $\cos \theta = \frac{\beta}{k}$ и $\sin \theta = \frac{\alpha}{k}$. При определении L_2 можно избежать работы по вторичному определению постоянных A и B для силы, приложенной в точке (2), что привело бы к новой формуле, где $(-x)$ считалось бы положительным направлением; просто заметим, что при таком изменении нашей точки зрения θ обращается в $-\theta$ (т. е. давление отстает от скорости) и, следовательно, $\alpha (=k \sin \theta)$ становится $(-\alpha)$, в то время как ρ остается без изменений.

Тогда имеем

$$Z_2 = i\omega L_2 = \frac{-ipcS_2}{k} (\alpha + \beta \operatorname{ctg} \beta l). \quad (233)$$

Приступим к определению M . Повторяя (231) для $Z_0=0$, получаем

$$\xi_1 = \frac{i \sin \beta l \cdot \Psi_0 e^{i\omega t}}{\rho c S_1 \cos (\beta l + \theta)}. \quad (231a)$$

Давление в (2) при $Z_0=0$ и $Z_l=\infty$ согласно (229) равно:

$$p_2 = \frac{e^{-\alpha l} \cos \theta \cdot \Psi_0 e^{i\omega t}}{S_1 \cos (\beta l + \theta)}, \quad (234)$$

и сила равна:

$$S_2 p_2 = \frac{\beta}{k} \frac{\sqrt{S_1 S_2} \Psi_0 e^{i\omega t}}{S_1 \cos (\beta l + \theta)},$$

так как

$$e^{-\alpha l} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \quad (235)$$

согласно определения, взаимное сопротивление равно:

$$M_{12} = i\omega M = \frac{S_2 p_2}{\xi_1} = - ipc \frac{\beta}{k} \frac{\sqrt{S_1 S_2}}{\sin \beta l}. \quad (236)$$

Читатель может непосредственно проверить это уравнение, определяя Z_1' и применяя уравнение (230). Попутно это будет проверкой примененной эквивалентной T -образной схемы рис. 18.

В предыдущем изложении α и β рассматривались как вещественные величины; иначе говоря, взятая частота находилась в пределах полосы пропускания. Разбирать явления в рупоре при частотах ниже критической, при которых β становится мнимым, мы не будем, так как на практике критическая частота весьма низка. Упомянули мы об этом лишь потому, что в полной теории экспоненциального рупора должен рассматриваться весь диапазон частот.

Чтобы дать правильное представление о главнейших характеристиках конечного рупора, следует выбирать сопротивления на зажимах схемы с учетом реальных рабочих условий, а также принять такой способ возбуждения в точке (1), при котором не произойдет чрезмерного искажения нормальных характеристик рупора. Во избежание осложнений с учетом характеристик источника звука, приложенного к рупору, мы просто предположим, что среда у узкого конца рупора приводится в движение по-

стоянной периодической силой (скажем) посредством поршня, сопротивлением которого можно пренебречь. На широком конце рупора примем сопротивление, оказываемое средой в виде:

$$Z_l = \rho c S_2 (X + iY), \quad (237)$$

где X и Y — функции частоты, природа которых рассмотрена в § 42 (уравнение 193а), где говорилось о реакциях, испытываемых поршнем. Частный вид выражения $X + iY$ будет определен в дальнейшем.

Пользуясь эквивалентной схемой рупора, имеем для сопротивления в точке возбуждения

$$Z = \frac{Z_1 Z_2 - M_{12}^2 + Z_1 Z_l}{Z_2 + Z_l}, \quad (238)$$

причем скорость в той же точке

$$\dot{\xi}_1 = \frac{\Psi}{Z}, \quad (238a)$$

где Ψ — приложенная сила ($\Psi_0 e^{i\omega t}$), не зависящая от частоты. Используя соотношения (232), (233) и (236), можно показать, что выражение в (238) равно:

$$Z_1 Z_2 - M_{12}^2 = \rho^2 c^2 S_1 S_2. \quad (239)$$

Если бы рупор возбуждался при постоянной периодической скорости, то для вычисления скорости на широком конце следовало бы воспользоваться соотношением

$$\dot{\xi}_2 = \frac{M_{12} \dot{\xi}_1}{Z_2 + Z_l}, \quad (240)$$

но оказывается, что это не есть наилучшая для рассмотрения рупора точка зрения. Подставляя значения M_{12} , Z_2 и Z_l (уравнения (233), (236), (237), имеем

$$\dot{\xi}_2' = \frac{-i \cos \theta \cdot \sqrt{S_1 S_2} \cdot \dot{\xi}_1}{S_2 (X \sin \beta l + i [Y \sin \beta l - (\sin \theta \sin \beta l + \cos \theta \cos \beta l)]).} \quad (241)$$

При $\beta l = m\pi$, где m — целое число, это выражение сводится к

$$\dot{\xi}_2 = \pm \dot{\xi}_1 \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} \quad (\text{условие „а“}) \quad (241a)$$

и по аналогии, если $\beta l = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$ (условие „b“),

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\mp i \cos \theta}{(X + iY) - i \sin \theta} \dot{\xi}_1 \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}. \quad (241b)$$

Теперь ясно, что при постоянной скорости $\dot{\xi}_1$ не учитывается (по крайней мере в условии „а“ выходное сопротивление рупора $Z_l = \rho c S_2 (X + iY)$; другими словами, изучая зависимость $\dot{\xi}_2$ от $\dot{\xi}_1$ мы недооцениваем трудности поддержания $\dot{\xi}$ постоянной, вследствие изменения с частотой сопротивления в точке возбуждения. Попутно заметим, что условие „а“ соответствует случаю органной трубы, открытой на обоих концах (уравнения (141), § 33) и является условием максимальной скорости на обоих концах рупора вследствие резонанса; для случая простой трубы в § 32 было показано, что оно же являлось условием передачи мощности с максимальным коэффициентом полезного действия, причем тогда сопротивление в точке возбуждения равно сумме сопротивлений движущего поршня и второго

поршня на другом конце трубки. Это же, очевидно, справедливо и для рупора, и подтвердится далее уравнением (244a).

Если с другой стороны желаем возбуждать рупор постоянной периодической силой Ψ , то используем соотношение ¹⁾

$$\dot{\xi}_2 = \frac{M_{12}\Psi}{(Z_1 Z_2 - M_{12}) + Z_1 Z} \quad (242)$$

Обращаясь к (239) для преобразования членов в скобках и замечая, что

$$Z_1 Z_2 = \frac{\rho^2 c^2 S_1 S_2}{k} [Y(\beta \operatorname{ctg} \beta l - \alpha) - iX(\beta \operatorname{ctg} \beta l - \alpha)], \quad (243)$$

имеем

$$\dot{\xi}_2 = \frac{-i\rho c \cos \theta \sqrt{S_1 S_2} \Psi}{\rho^2 c^2 S_1 S_2 [\sin \beta l + (Y - iX)(\cos \theta \cos \beta l - \sin \theta \sin \beta l)]}.$$

Если $\beta l = m\pi$ (m — как и раньше, целое число), то

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\pm \Psi}{\rho \sqrt{S_1 S_2} (X + iY)} \quad (244a)$$

и если $\beta l = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, то

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\mp \Psi \cos \theta}{\rho c \sqrt{S_1 S_2} [(X + iY) \sin \theta - i]}. \quad (244b)$$

Теперь мы можем заняться окончательным сопротивлением, т. е. сопротивлением среды на открытом конце, имеющем вид:

$$\rho c S_2 (X + iY). \quad (237)$$

Если бы это было сопротивление, представляющееся поршню, находящемуся в бесконечной стенке, то (см. уравнение 193a), мы бы имели

$$X = \left[1 - \frac{J_1(2kR)}{kR} \right], \quad Y = \frac{K_1(2kR)}{2k^2 R^2}, \quad (245)$$

причем согласно (198) добавочная инерция от среды при частоте, равной нулю, равна:

$$\frac{i\rho c S_2 Y}{i\omega} \Big|_{\omega=0} = \rho S_2 \cdot \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{S_2}{\pi}}. \quad (245a)$$

Далее, так как мы не имеем решения задачи относительно реакций на поршень, колеблющийся в конце бесфланцевой трубы, необходимо сделать некоторое допущение, вроде выражаемого уравнением (245) для получения приемлемого теоретического решения задачи о конечном рупоре. Можно полагать, что введенное приближение будет достаточным в частности потому, что мы уже делали ряд других упрощенных предположений для получения теории в изложенной простой форме. Например, не учитывалось рассеяние; не учитывалось также и то обстоятельство, что фронт волны может иметь такую кривизну, что предположенные нами соотношения для ее увеличивающейся, по мере следования, площади уже не вполне соблюдаются.

Тем не менее, если допустимо при решении этой задачи считать, что рупор с одного конца снабжен бесконечным плоским фланцем, то можно

¹⁾ В (242) и подобных уравнениях величина, обратная коэффициенту, при Ψ , является, очевидно, приведенным сопротивлением конечного рупора (242) и следует из (238a) и (240).

бы сделать еще шаг и заменить фланец конусом с очень большим углом при вершине. Тогда фронт волны, излучаемой с открытого конца рупора, можно считать эквивалентным получаемому от пульсирующей сферической поверхности. Остается лишь определить более или менее точно площадь и радиус такой сферы, чтобы получить значительное упрощение функции $X + iY$ по сравнению с (245).

Мы уже в свое время отмечали (уравнение (175а) и последующие комментарии), что поршень и пульсирующая полусфера равной площади, оба снабженные фланцем в виде бесконечной плоскости, имеют одинаковое сопротивление излучения при высоких и низких частотах, хотя при средних значениях поршень достигает конечного максимума более быстро. Поэтому будем считать некую сферическую поверхность, кривизна которой подлежит определению, но площадь которой есть S_2 , примерно, эквивалентной поршню в безграничной стенке. Для определения кривизны (а следовательно, и телесного угла конического фланца) берем телесный угол конуса таким, чтобы в обоих случаях максимальная добавочная инерция (при нулевой частоте) была одинакова. Мы нашли из уравнения (174), что при нулевой частоте у сферической поверхности радиуса r_0 добавочная масса равна ρr_0 на единицу поверхности.

Полагая $S_2 = \Omega r_0^2$, имеем $r_0 = \sqrt{\frac{S_2}{\Omega}}$ и, следовательно, приравнивая массу $\rho r_0 S_2$ для сферической поверхности массе для поршня, равной площади (245а), получаем

$$\rho S_2 \cdot \frac{8}{3\pi} \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = \rho S_2 \sqrt{\frac{S_2}{\Omega}}. \quad (246)$$

Простой расчет дает для телесного угла $\Omega = 1,39 \pi$. Если R — радиус поршня, то $\pi R^2 = 1,39 \pi r_0^2$ и $r_0 = 0,85 R$.

Следовательно, для новых функций X' и Y' из (174) имеем

$$X' = \frac{k^2 r_0^2}{k^2 r_0^2 + 1}, \quad Y' = \frac{k r_0}{k^2 r_0^2 + 1}, \quad (247)$$

так как $\omega = kc$ и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Наконец, так как сопротивление $Z_l = \rho c S_2 (X' + iY')$ можно написать

$$Z_l = \rho c S_2 \cdot \cos \varphi \cdot e^{i\varphi}, \quad \text{где } \varphi = \arctg \frac{1}{k r_0}. \quad (248)$$

Метод, предложенный для определения сопротивления на конце рупора, может быть применен и к другим задачам акустики. Интересно сравнить ход функций X и Y по (245), для поршня, и по (247), для „эквивалентной“ сферической поверхности. Это сделано на прилагаемом рис. 19, где обе группы функций нанесены в зависимости от аргумента $kR = 1,18 k r_0$; мы замечаем, что наибольшее расхождение между X и X' равно, примерно, 20% (для $kR = 2,5$), в то время как для Y и Y' оно равно, примерно, 40% при $kR = 1,3$.

Теоретическое расхождение, несомненно, больше чем то, которое пришлось бы наблюдать в любом случае практики, так как фронт волны, исходящей из широкого конца рупора, едва ли можно считать плоским; гораздо более вероятно, что он выпуклый. Следует попутно заметить, что величины Y' , меньшие по сравнению с Y , получаемые при низких частотах, согласуются с меньшей концевой поправкой для бесфланцевой трубы (по сравнению с фланцевой), что было установлено Рэлеем и отмечено нами в § 43.

Подставляя выражение (248) для Z_l в (244а), имеем для значений ξ_2 , соответствующих условию $\beta l = m\pi$ (опуская экспоненциальный множитель)

$$|\xi_2|_a = \frac{\pm \Psi_0}{\rho c \sqrt{S_1 S_2}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \cdot e^{-i\varphi}, \quad \left(\frac{1}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{k^2 r_0^2 + 1}}{k r_0} \right). \quad (249)$$

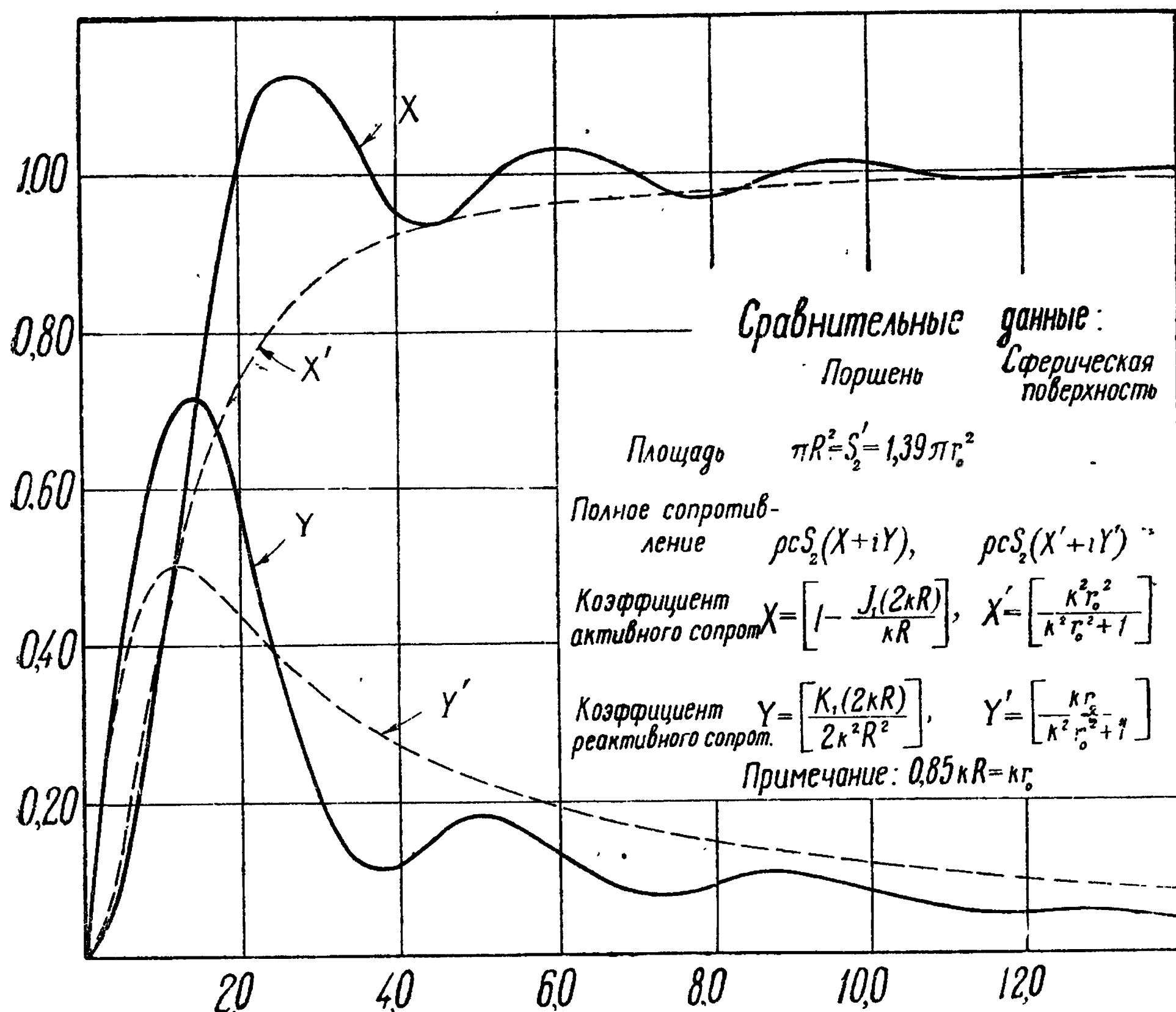


Рис. 19. Полное сопротивление поршня и „эквивалентной“ сферической поверхности ¹⁾.
При втором условии, когда $\beta l = (2m+1) \frac{\pi}{2}$, согласно (244b), имеем

$$|\xi_2|_b = \left. \begin{aligned} \frac{\mp \Psi_0}{\rho c \sqrt{S_1 S_2}} \cdot \frac{\cos \theta \cdot e^{-i\varphi'}}{V(X' \sin \theta - 2Y') \sin \theta + 1} \\ \text{tg } \varphi' = \frac{Y' \sin \theta - 1}{X' \sin \theta} \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

так как $X'^2 + Y'^2 = X'$.

Теперь можно охарактеризовать поведение рупора в целом в воспроизводимом диапазоне, имея в виду, что для самой низкой воспроизводимой частоты $\sin \theta = \frac{\alpha}{k} = 1$, $\cos \theta = 0$, в то время как с переходом к более высоким частотам $\sin \theta$ стремится к нулю, а $\cos \theta$ — к единице. При этом сошлемся снова на верхнюю кривую рис. 17, представляющую график изменения $\cos \theta$ для экспоненциального рупора, чтобы показать изменения интенсивности у устья с частотой, предполагая отсутствие отражения.

Заметим сначала (§ 45), что

$$\sin \theta = \frac{\alpha}{k} = \frac{m}{2k}, \quad \cos \theta = \frac{\beta}{k} = \sqrt{1 - \frac{m^2}{4k^2}}, \quad (251)$$

¹⁾ По оси абсцисс отложены значения аргумента $kr = 2\pi \frac{2}{\lambda}$.

что определяет фазную характеристику рупора. Тогда при частотах, для которых действительны соотношения (250) (т. е. для условия отсутствия резонанса в рупоре) имеем

$$X' \sin^2 \theta = \frac{m^2 r_0^2}{4(k^2 r_0^2 + 1)}, \quad Y' \sin \theta = \frac{m r_0}{2(k^2 r_0^2 + 1)}. \quad (252)$$

Очевидно, что при этих частотах (так как величины (252) малы по сравнению с единицей) скорость $|\dot{\xi}_2|_b$ в устье рупора приблизительно та же, что и при бесконечном рупоре: именно она пропорциональна $\cos \theta$.

При более высоких частотах, когда $\cos \theta$ стремится к единице, φ' стремится к нулю.

При частотах, для которых $\beta l = m\pi$, расположенных между последовательными значениями частоты, упомянутыми выше, конечный рупор находится в резонансе, и значения $|\dot{\xi}_2|_a$ пропорциональны $\frac{1}{\cos \varphi}$; поэтому (см. уравнение 249) эти точки определяют ряд максимумов отдачи рупора, уменьшающихся с возрастанием частоты и асимптотически приближающихся к уровню

$$|\dot{\xi}_2|_b = |\dot{\xi}_2|_a = \frac{\pm \Psi_0}{\rho c \sqrt{S_1 S_2}}, \quad (253)$$

представляющему постоянную характеристику отдачи рупора при высоких частотах. Когда этот уровень достигнут, то резонанс устранен, так как сопротивление рупора сравнивается с сопротивлением среды; рупор работает как обычный трансформатор при режиме наибольшего к. п. д. и посылает приблизительно параллельный пучок звукового излучения.

При изучении рупоров попутно возникает много специальных интересных вопросов: о направленном действии, о явлениях рассеяния и изменения фазы и т. д. На основе общих принципов читатель сможет в них разобраться; нами, излагаясь эти вопросы, как чересчур специальные, не будут. Ряд явлений, наблюдаемых при работе с рупорами, требует тщательного экспериментального изучения и за недостатком данных здесь, к сожалению, освещен быть не может.

§ 47. Действие звуковых волн на простую колебательную систему.

При рассмотрении элементарной теории резонатора как колебательной системы (§ 24) мы встретились с необходимостью знать поведение системы под действием звуковых волн. Предпринятое нами изучение типичных явлений излучения и распространения будет неполным, если мы не рассмотрим более подробно случая резонатора или другой простой системы, помещенной в поле звуковых волн, так как этот вопрос возникает всегда, когда речь заходит об обнаружении и измерении звуковых волн.

Рискуя повторяться, мы все же коснемся вопроса об избирательном поглощении и усилении (на этот раз на энергетической основе); кроме того, уделим внимание искажениям первоначального поля, вносимым присутствием резонатора, и, наконец, отметим влияние резонатора на помещенный по близости источник звука. Строгая трактовка всех этих вопросов трудна, особенно второго, так как, кроме чисто резонансного действия системы, заключающая ее оболочка вызовет добавочные искажения поля, действуя как жесткое препятствие.

Начнем с вопроса о механизме поглощения, связанного с вопросом об обратном излучении, как во всех общих задачах излучения. Пусть (как и в § 24) резонатор настроен на частоту возбуждающих волн, исходящих

из источника интенсивности A_1 , расположенного на расстоянии x от устья резонатора.

Единственным сопротивлением, оказываемым движущейся массой воздуха в отверстии резонатора, является сопротивление излучения последнего, равное:

$$S_{b1} = \frac{\rho \omega^2 S^2}{4\pi c}, \quad (175)$$

если размеры резонатора малы по сравнению с длиной волны.

Если предположим отсутствие резонатора, то потенциал скорости в точке x равен:

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{A_1}{4\pi x} e^{i(\omega t - kx)} \quad (254)$$

$$\text{и избыточное давление } p = \rho \dot{\varphi}_0 = i\omega \rho \varphi_0. \quad (255)$$

Интенсивность определяется как

$$\left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}} = \frac{|p^2|_{\text{max}}}{2\rho c} = \frac{\omega^2 \rho |\varphi_0^2|_{\text{max}}}{2c}. \quad (256)$$

Очевидно, что при встрече с сопротивлением (175) (которое много меньше сопротивления $\rho c S$, эквивалентного поверхности свободной среды) избыточное давление приходящей волны вызовет в точке x гораздо большую скорость, чем если бы резонатор отсутствовал. Энергия доставляется из смежной области среды и возникает вопрос, как велика поверхность, с которой берется этот избыток энергии. Приближенный ответ можно дать, вычислив скорость из давления, согласно (255) и сопротивления (175). Тогда имеем (пользуясь постоянными на единицу поверхности)

$$\dot{\xi} = \frac{-i\omega \rho \varphi_0}{\rho \omega^2 S} \cdot 4\pi c = \frac{-i4\pi \varphi_0}{kS}, \quad (257)$$

причем резонатор ведет себя теперь как новый источник с интенсивностью:

$$A_2 = S |\dot{\xi}|_{\text{max}} = -\frac{4\pi}{k} |\varphi_0|_{\text{max}} = -\frac{iA_1}{kx}. \quad (258)$$

Максимальная мощность, равная $A_2 |p|_{\text{max}}$, будет

$$\left. \begin{aligned} |A_2 p|_{\text{max}} &= \frac{4\pi}{k} \cdot \omega \rho |\varphi_0^2|_{\text{max}} = \left(\frac{\lambda^2}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 \rho}{c} |\varphi_0^2|_{\text{max}} \right) \\ &\left(k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \right); \end{aligned} \right\} \quad (259)$$

или в среднем

$$|A_2 p|_{\text{ср.}} = \frac{\lambda^2}{\pi} \frac{\omega^2 \rho}{2c} |\varphi_0^2|_{\text{max}} = \frac{\lambda^2}{\pi} \left| \frac{dW}{dt} \right|_{\text{ср.}}, \quad (259a)$$

если сравнить с (256). Отсюда ясно, что поверхность фронта волны, с которой энергия извлекается (и снова излучается) резонатором, имеет размер порядка $\frac{\lambda^2}{\pi}$.

Это означает, что плотность энергии на площади S устья резонатора больше, чем плотность в исходном поле в отношении $\frac{\lambda^2}{\pi S}$, причем этот коэффициент усиления мощности в точности равен полученному ранее в § 24 для коэффициента усиления скорости.

Так и должно быть, так как возбуждающая сила ($S\rho$) резонатором ни в какой степени не усиливается; мощность ($p\dot{\xi}$) с увеличением скорости

возрастает по простому линейному закону. Поверхность $\frac{\lambda^2}{\pi}$ фронта волны, с которой энергия отнимается, согласно предположения, больше, чем площадь S резонатора; отсюда заключаем, что резонатор, в отношении влияния на первичное поле действует как „губка“, вызывая схождение линии потока первичного поля к своему устью. Понимание механизма избирательного поглощения полезно не только в акустике, но главным образом и в оптике.

Кроме поглощенной и излученной обратно энергии, неизбежно происходит отражение или рассеяние первичной энергии корпусом резонатора, рассматриваемом как препятствие. На практике сопротивление рабочего органа (т. е. диафрагмы) звукового детектора очень велико по сравнению с $\rho c S$, и изложенные выше условия для простого резонатора не имеют места. Детектирующий звук прибор в целом следует рассматривать как неподвижную сферу или диск и для того, чтобы вычислить давление на мембрану, следует сначала определить влияние препятствия (т. е. детектирующего прибора) на звуковое поле, на основании чего можно затем найти потенциал скорости, а следовательно, и давление в любой точке поверхности детектора. Действие работы диафрагмы на поле практически равно нулю, но и при этом задача представляет большие теоретические трудности; мы здесь не будем пытаться ее разрешить).

При низких частотах для сферического препятствия радиуса a общая энергия рассеяния по всем направлениям равна приходящей энергии, умноженной на $\frac{7}{9}(ka)^4$. Для тонкого диска радиуса a соответствующее выражение будет $\frac{1}{2}\frac{6}{7}(ka)^4$, где a —радиус (Лемб, § 81). При малых препятствиях рассеянная энергия невелика, но с увеличением размеров препятствия она, очевидно, быстро возрастает; она растет также с увеличением частоты, причем, например, быстрее, чем сопротивление излучения b_1 . При этом, по мере увеличения частоты, все большая часть энергии отражается (т. е. рассеивается) от поверхности препятствия в сторону источника, пока не достигается условие нормального для данной поверхности отражения. При очень высоких частотах давление на упругую диафрагму, обращенную к источнику, равно удвоенному избыточному давлению падающих волн (ср. уравнение (121)). При производстве опытов единственный способ избежать влияния препятствий и необходимости их учета при применении весьма упругого детекторного прибора—это снабдить прибор бесконечной жесткой стенкой; тогда (121) справедливо для всех частот. Если, с другой стороны, возможно пользоваться легкой настраиваемой детектирующей системой, сопротивление которой (включая сопротивление излучения) приблизительно равно сопротивлению излучения среды, то можно получить хорошие результаты при малом искажении первичного поля.

Желающие проследить сравнительно сложные вычисления, необходимые для строгой трактовки вопросов о звуковых тенях, препятствиях и рассеянии излучения могут обратиться к трудам Лемба (§§ 79, 80, 81) и Рэлея (гл. XVII).

В заключение рассмотрим, каким образом резонатор, помещенный вблизи источника звука, может быть применен для усиления звуковых колебаний. Согласно (258), если kx —величина малая, напряженность источника возрастает, благодаря присутствию резонатора в отношении $1:kx$; поэтому интенсивность в некоторой удаленной точке увеличится в отношении $1:k^2x^2$. Это кажется парадоксальным, так как, если бы резонатор был удален от источника, он отдавал бы только ту энергию, которую он мог бы извлечь из некоторой ограниченной части пространства, где

действуют волны, порожденные источником (1). Следует понимать, что если источник (1), как мы предположили, точечный, то основная составляющая скорости расходитя по фазе на 90° с давлением в данной точке (уравнение 161) и (161a) § 36 так, что точечный источник сам по себе — не весьма эффективный излучатель. Помещение резонатора вблизи источника дает средство, при помощи которого избыточное давление может вызывать большую скорость, с которой оно совпадает по фазе, что дает соответственный выигрыш в излучаемой мощности. Таким образом, уменьшением сопротивления излучения R и в то же время компенсацией реактивного сопротивления самого источника (путем настройки резонатора) величина $\frac{p^2}{R}$, представляющая излученную мощность, может быть сделана весьма большой.

§ 48. Давление звукового излучения.

При воздействии звуковых волн на стенку, казалось бы (как в электродинамическом случае) должно иметь место положительное давление от излучения. Так оно и есть в действительности; однако, это явление второго порядка, которым мы при изучении плоских волн в § 31 пренебрегали. Явление разобрано Рэлеем в двух статьях¹⁾ и имеет практическое использование при измерениях интенсивности звука. Метод Рэлея, состоящий в определении силы, требующейся для ограничения колебаний у конца струны, будет пояснен в задаче 39, которая даст читателю представление о механизме давления излучения. Это давление прежде всего зависит от потенциальной энергии, заключенной в среде, и равно средней плотности энергии, связанной с движением волны.

Чтобы привести здесь доказательства Рэлея, нам понадобился бы общий интеграл гидродинамических уравнений движения, о которых мы не говорили. Поэтому воспользуемся простым и изящным методом Лармора²⁾, данным им для общего случая плоских волн любого вида, отраженных по нормали от стены. Предположено, что стенка может перемещаться нормально к своей плоскости и двигается с постоянной скоростью v навстречу волнам, обладающим волновой скоростью c и средней плотностью энергии E . Если бы стенка была неподвижна, то полная плотность энергии от падающих и отраженных волн была бы равна $2E$. Длина серии волн, падающих на подвижную стенку, в единицу времени равна $c + v$, а для отраженных волн вследствие постоянного передвижения стенки эта длина подвергается сжатию до длины $c - v$. Таким образом, плотность энергии в отраженной волне увеличивается в отношении

$$\frac{E + \Delta E}{E} = \frac{c + v}{c - v} = 1 + \frac{2v}{c}, \quad (260)$$

так как v — величина ничтожно малая, поэтому $\Delta E = \frac{E \cdot 2v}{c}$ и полная плотность энергии будет теперь $2E + \Delta E$.

Увеличение общей энергии в пределах расстояния s перед подвижной стенкой равно $\Delta E \cdot s$, что можно объяснить только тем, что при этом стенкой совершается работа сжатия приходящего излучения. Если среднее

¹⁾ Phil. Mag., III, 1902, стр. 338 и X, 1905, стр. 364; обе перепечатаны в V томе его „Scientific Papers. Реферат вопроса дан W. Weaver Phys. Rev., 15, 1920, стр. 399.

²⁾ Encyc. Brit., том 22, глава об излучении.

давление излучения обозначить Ψ_R , то произведенная стенкой работа в единицу времени равна $\Psi_R \cdot v$ и, следовательно:

$$\Psi_R \cdot v = \Delta E \cdot c = 2E \cdot v, \quad (261)$$

то есть среднее давление излучения равно средней плотности энергии в среде, находящейся по соседству со стенкой.

Интенсивность излучения равна произведению плотности энергии на скорость волны (§ 31), поэтому давление излучения может служить мерой силы звука, если имеется достаточно чувствительный радиометр. Таковой был действительно сконструирован при опытах с высокочастотными волнами под водой¹⁾. Радиометр представляет собой обыкновенные крутильные весы; тонкостенный металлический ящик с воздухом, будучи погружен, служит прекрасной, в совершенстве отражающей лопастью. Этот простой и легко градуируемый прибор служит превосходным образцом техники современной экспериментальной акустики.²⁾

ЗАДАЧИ.

31. Показать, что в высокочастотном излучателе слоистой структуры (описанном в § 41) обе железные пластинки должны для резонанса иметь толщину в четверть волны; при этом предполагается, что внутренний кристаллический слой, возбуждает прилегающую границу поверхности железа с заданной скоростью.

32. Телефонная диафрагма (зажатая круглая пластинка) имеет массу 5 г, радиус 3 см, собственную частоту 1000 герц и показатель затухания в воздухе 200. Она помещена в воду, причем к жидкости обращена лишь одна ее сторона и приняты меры к недопущению изменения положения равновесия мембраны вследствие гидростатического давления. Найти приближенные значения собственной частоты и затухания системы при этих новых условиях.

33. Чему равен коэффициент отражения энергии для волны, прошедшей внутри трубы и достигшей открытого конца? Предполагается, что диаметр конца трубы мал по сравнению с длиной волны.

34. Цилиндрическая труба единичного радиуса, имеющая 1 м длины, возбуждается на одном конце, а другой конец открыт в воздух. Чему равно сопротивление трубы в точке возбуждения при низких частотах?

35. Вывести типовые уравнения для явлений распространения и образования стоячих волн в цилиндрических трубах путем соответствующего изменения теории экспоненциального рупора.

36. Найти для экспоненциального рупора фазовые соотношения между давлением и скоростью для частот ниже критической.

37. Вывести общее выражение для поведения резонатора в звуковом поле в предположении, что он не настроен на частоту возбуждения и что длина волны велика по сравнению с размерами резонатора.

38. В § 43 мы видели, что реактивное инерционное сопротивление на конце трубы эквивалентно увеличению длины трубы. Равным образом справедливо, что реактивное упругое сопротивление вследствие наличия

¹⁾ Такой радиометр был построен и применен Вильсом (A. P. Wills) для измерения излучения, ранее описанного (§ 41) высокочастотного вибратора. Подобным же прибором пользовался Ланжевен (Langevin).

²⁾ Здесь следует отметить пондеромоторное действие одной колеблющейся системы на другую в том же звуковом поле. Это явление недавно было исследовано Мейером (E. Meyer, Ann. d. Phys., 71, 1923, стр. 567) и кратко описано Ветцманом (Waetzmann, Phys., Zeit., XXVI, 1925, стр. 746 — 747).

„луковицы“ на конце трубы эквивалентно уменьшению длины трубы. Исходя из этих положений, вычислить собственные частоты трубы длиной l и поперечного сечения S , с одной стороны оканчивающейся жестким поршнем, а с другой — „луковицей“ объема V_0 (Рэлей II, § 317).

39. Длинная струна с натяжением τ в точке $x=0$ вблизи одного конца проходит сквозь тяжелый цилиндр¹⁾, могущий перемещаться вдоль струны.

Поперечная волна, смещение которой есть $\xi_0 \sin(\omega t + kx)$, проходит вдоль струны к цилиндру; здесь она отражается полностью, так как всякое поперечное перемещение предотвращено цилиндром. Показать, что средняя (в пространстве) плотность энергии струны есть $\tau k^2 \xi_0^2$; путем разложения сил натяжения струны в точке $x=0$ показать, что средняя (во времени) сила, стремящаяся переместить цилиндр вдоль струны, равна $\tau k^2 \xi_0^2$, т. е. средней плотности энергии в струне.

40. Плоская волна падает нормально на жесткую бесконечную стенку, имеющую круглое отверстие, проводимость которого K мала по сравнению с длиной волны. Показать, что отношение потока энергии сквозь отверстие к интенсивности падающей волны равно приблизительно $2K^2:\pi$ (Лемб, § 82). Почему вы вправе пренебречь сопротивлением излучения при вычислении скорости в отверстии?

ГЛАВА V.

АКУСТИКА ЗАКРЫТЫХ ПОМЕЩЕНИЙ; ПОГЛОЩЕНИЕ, ОТРАЖЕНИЕ И РЕВЕРБЕРАЦИЯ.

§ 50. Архитектурная акустика.

Большинство акустических явлений происходит в помещениях, ограниченных отражающими или поглощающими стенами, уменьшающими звуковую энергию и дающими возможность образоваться стоячим волнам и другим осложняющим явлениям, не имеющим места в неограниченном пространстве. Ввиду практической важности этих явлений они подвергались тщательному изучению и была разработана теория архитектурной акустики. Она и является основной темой настоящей главы.

Собственно архитектурная акустика имеет дело с явлениями, происходящими при производстве звуков речи и музыки в залах; поэтому, прежде всего, следует выяснить, в чем, в каком свойстве этого рода звуков заключаются наибольшие трудности неискаженной передачи.

Это свойство зависит от того, что первоначально производимые звуки речи и музыки состоят из составляющих колебаний вполне определенных длин волн, которые складываются определенным образом, и если они воспроизводятся перед ухом слушателя без точного повторения свойств исходных звуков (например амплитуды как функции времени), то ухо ощущает искаженную и часто совершенно неудовлетворительную передачу; искажения бывают двоякого рода, хотя оба явления зависят от явлений многократного отражения.

Во-первых, каждому источнику требуется время для того, чтобы установить излучение известной средней плотности энергии в замкнутом помещении и, наоборот, с момента устранения возбуждающей силы также требуется время, пока средняя плотность энергии упадет до нуля. Это уже само по себе будет вносить временное искажение в каждую отдельную составляющую звука ограниченной длительности. Такое явление, про-

¹⁾ Буквально „рукав“ (sleeve). Прим. переводчика.

исходящее во всем помещении, особенно послезвучание („hang over“ в конце интервала называется реверберацией; оно аналогично (но не эквивалентно) продолжению собственных колебаний в системе с несколькими степенями свободы до израсходования всей энергии. Во-вторых, вследствие повторяющегося отражения в помещении возникают стоячие волны для каждой отдельной составляющей частоты звука; получаются уже пространственные искажения, и в каждый данный момент для любой точки внутри помещения возникающее при интерференции всех слагающих результирующее колебание может составить звук с совсем не тем распределением энергии по частоте, как в исходном звуке. Чтобы последнее явление отличить от реверберации, мы назовем его местным волновым искажением.

Итак, перед слушателем возникает совокупность двух связанных между собой явлений: а) реверберация, т. е. несоответствие изменений средней плотности энергии с изменением мощности источника и б) местное явление искажения волны, меняющееся в пространстве и во времени вследствие идиосинкразии системы стоячих волн.

С первого взгляда может показаться, что универсальным средством против этих явлений будет придание достаточного затухания или поглощающей способности граням помещения, чтобы совершенно избавиться от стоячих волн, т. е., иными словами, повторить условия, преимущественно свойственные открытому пространству. Например, оркестровая музыка звучит мягко и приятно на открытом воздухе, если нет мешающих шумов. Здесь, однако, начинают сказываться соображения психологические и порой эстетические: эффект музыки и речи зависит в некоторой мере от их звучности и в этом случае реверберация дает явное преимущество, продолжая и усиливая некоторые тона, что делает передачу художественной. Реверберация увеличивает также перекрытие одного тона другим во времени, что иногда также желательно. Вдобавок, часто мощность, могущая быть затрачена источником, несколько ограничена. Когда духовой оркестр играет на открытом воздухе, то характер музыки и мощность обычно достаточны для создания у большого числа слушателей впечатления громкости; такого эффекта, однако, нельзя достигнуть при исполнении камерной музыки струнным квартетом или при сольном пении вследствие слишком быстрого рассеяния энергии при естественно малой мощности источника. В этих последних случаях для полноценности исполнения приходится прибегать к закрытому помещению и воспользоваться реверберацией для увеличения средней плотности энергии в зале. Это обязывает к установлению строгого контроля над реверберацией; заметим, что в таких, чисто физических, исследованиях как анализ звука и т. д. искажения вследствие реверберации не могут быть терпимы.

Отсюда ясно, что для решения какой-либо задачи архитектурной акустики требуется тщательный подход; прежде всего нужно точно знать, какая реверберация нужна для данного исполнения (что определяется из опыта) и затем следует определить, какие физические мероприятия следует применить в данном помещении для получения нужного результата; это уже дело прикладного знания. Основной базой для изучения этих вопросов может служить труд Сэбина¹⁾ последний тщательно собрал материал, позволяющий судить о желательной для каждого типичного исполнения величине реверберации, а также произвел подробное исследование физических факторов, влияющих на реверберацию. В дальнейшем согласимся с мнением квалифицированных критиков относительно опти-

¹⁾ Wallace Clement Sabine, Proc. Am. Acad., XLII, 1906. Перепечатано в „Сборнике статей по акустике“ (Collected Paper on Acoustics), стр. 69.

мальной реверберации и разбор задачи будем вести с чисто физической точки зрения.

Предмет архитектурной акустики обнимает собой широкий класс явлений, в том числе такие специальные, как эхо, фокальные свойства отражающих поверхностей, „шепчущие галереи“ (whispering galleries) и т. д. Большинство из них, хотя и представляет некоторый интерес, но уже не ново; многое было исследовано раньше, и мы сошлемся здесь лишь на Рэля (II и XIV) и Сэбина, у которых можно найти интересный материал по этим вопросам¹⁾.

Прежде чем перейти к изложению теорий настоящей главы, напомним об условиях слушания при наличии мешающих шумов.

Пусть энергия звуков, на которых сосредоточено наше внимание, колеблется в некоторых пределах; тогда если уровень энергии²⁾ привходящих шумов достигает нижнего из этих пределов, то, очевидно, следует поднять и все уровни энергии звуков, которые мы слушаем, чтобы они достаточно выделялись на фоне шумов. Если этого сделать нельзя (по механическим или эстетическим причинам), то качество воспроизведения страдает. Задача сохранения уровня энергии выше уровня помех встает во всех случаях приема звука. Она относится к области техники, а потому здесь не обсуждается; однако, читатель должен понять, что допущение в дальнейших теоретических выкладках отсутствия помех следует принимать лишь с оговоркой. Примером работ в этой области является статья Кнудсена, „Явление интерференции тона и шума при приеме речи“ (Phys. Rev. 26, 1925, стр. 133). После усвоения механики реверберации читатель с интересом может ознакомиться с заметками Сэбина³⁾.

§ 51. Отражение и поглощение.

Ввиду того, что отражение в первую очередь влияет на уменьшение излучения внутри помещения, важно иметь представление о механизме этого явления, особенно у поверхности поглощающей стены. Материал поверхности меняется от твердых, покрытых глазурью изразцов и кирпичей, почти не проницаемых для звуковых волн до обоев из ткани, легких, пористых, которые поэтому очень хорошо пропускают и поглощают звуковое излучение.

Между этими крайностями имеется ряд промежуточных материалов: дерево, штукатурка, бумага, грубый кирпич и т. д.; все они в различной мере пористы.

В § 34 мы ознакомились с классической концепцией (данной Рэлеем) поверхности стены из легкого материала, пронизанной каналами и щелями, ведущими от внешней поверхности внутрь. Приходящие звуковые волны отчасти проникают в эти узкие проходы, где они затухают, вследствие сопротивления трения. (Теория этого явления приведена в приложении А, и с ее положениями читателю необходимо ознакомиться, прежде чем идти дальше). Для начала мы примем, что стенки каналов в поглощающем материале жестки и неподатливы, а также бесконечно тонки; таким образом, каналы группируются тесно, образуя шестиугольную сотовую структуру, причем каждый можно рассматривать без особой натяжки, как узкий цилиндр кругового сечения. Легко найти сопротивление, пред-

¹⁾ Сэбин „Статьи“, стр. 255. „On Whispering Galleries“.

²⁾ Выражение „уровень энергии“ не совсем правильно, однако, удобно выражает плотность энергии или мощность в точке слушания, измеренную от некоторого подходящего нуля. Обычно, для обозначения разности уровней применяется шкала „единиц передачи“. (Transmission Units).

³⁾ „The Nature and Reduction of Office Noises, Am. Arch., 121, 1922, стр. 441, 487, 527).

ставляемое устьем одного из этих каналов, а следовательно, и сопротивление стены для звуковых волн; путем сравнения этого сопротивления с сопротивлением излучения свободного пространства, содержащего падающую и отраженную звуковые волны, можно вычислить, какая доля падающего излучения отражена и какая прошла внутрь и поглощена.

В приложении А показано, что скорость частиц в весьма узкой трубке распространяется согласно уравнению

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \beta x)}, \quad (B')$$

в котором

$$\beta = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega R_1}{2\rho}}, \quad R_1 = \frac{8\mu}{r_0^2}. \quad (K')$$

Это дает для избыточного давления сходное уравнение

$$p = p_0 e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \beta x)}, \quad (262)$$

откуда получаем градиент давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\beta(1+i)p. \quad (263)$$

Пользуясь известным соотношением между градиентом давления, скоростью потока и коэффициентом сопротивления R_1 , свойственным трубке, имеем

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{R_1} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\beta(1+i)}{R_1} p = \frac{1}{Z} p, \quad (264)$$

где

$$Z = \frac{R_1}{\beta(1+i)} = \frac{R_1(1-i)}{2\beta} \quad (265)$$

есть сопротивление трубки на единицу площади поперечного сечения. Из (K'), в котором пренебрежено явлением инерции согласно закону Пуазеля (Poiseuille), $R_1 = \frac{8\mu}{r_0^2}$, следовательно, подставляя также значение β , получаем для сопротивления

$$Z = \frac{c(1-i)}{2} \sqrt{\frac{8\mu}{r_0^2} \cdot \frac{2\rho}{\omega}} = \frac{2\rho c(1-i)}{r} \sqrt{\frac{\mu}{\rho\omega}} = \rho c M(1-i). \quad (265a)$$

M является удобным коэффициентом, заключающим в себе кинематическую вязкость ($\frac{\mu}{\rho}$), частоту и радиус трубки¹⁾.

Так как Z отличается от ρc , сопротивления излучения прилегающего свободного пространства, то будет наблюдаться отражение от поверхности

¹⁾ Поскольку мы приняли для объемного модуля среды в трубке $\kappa' = \gamma p_0$ (см. приложение А), постоянная c представляет, очевидно, неизменную скорость звука в свободном пространстве. Рэлей при разборе этого вопроса предпочитает для весьма малых трубок изотермический объемный модуль $\kappa = p_0$, который, конечно, ведет к ньютоновскому выражению скорости звука $\frac{c}{\sqrt{\gamma}}$. Желая пользоваться ньютоновской скоростью, в то же время, сохраняя удобный коэффициент ρc в (265a), следует вместо M брать величину $M' = \frac{M}{\sqrt{\gamma}}$. Следует особо отметить, что ни ньютоновская, ни обычная лапласовская величина скорости не представляет фазовой скорости волн, диффундирующих в узкую трубку; последняя скорость гораздо меньше, на что указано в приложении А. Попутно заметим, что для канала диаметром 0,02 см (см. последующий пример) неизвестно, что следует предпочесть для объемного модуля — адиабатическую ли величину γp_0 или изотермическую p_0 .

стены. Переписывая уравнение (120), § 31, и замечая, что при этом уравнении $R_2 = Z$ и $R_1 = \rho c$, имеем для скорости частиц отраженной волны следующее выражение через скорость частиц нормально падающей волны:

$$-\frac{\dot{\xi}_0'}{\dot{\xi}_0} = \frac{Z - \rho c}{Z + \rho c} = \frac{M(1 - i) - 1}{M(1 - i) + 1}. \quad (266)$$

Коэффициент отражения падающей энергии, полученный путем возвышения в квадрат этого отношения, равен:

$$R = \frac{(M - 1 - iM)^2}{(M + 1 - iM)^2} = \frac{2M^2 - 2M + 1}{2M^2 + 2M + 1} e^{i\varphi}. \quad (267)$$

где φ — разность фаз между $\dot{\xi}_0'$ и $\dot{\xi}_0$ — величина, с которой мы непосредственно еще не сталкивались. Можно легко показать, что $|R|$ получает минимальное значение при $M = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Это означает, что для каждой данной сотовой структуры, составленной из капиллярных трубок, существует частота минимального отражения или максимального поглощения. (В дальнейшем будет видно, какую это играет роль). Пусть, например, в структуре стены проводники имеют диаметр 0,2 мм или $r_0 = 10^{-2}$.

Тогда, так как $\frac{\rho}{\rho} = 0,13$ (приблизительно для воздуха), находим, что $M = \frac{1}{\sqrt{2}}$ соответствует частота, примерно $\frac{\omega}{2\pi} = 1600$. Из этой частоты вычисляем, согласно (267), $|R| = 0,17$ (коэффициент минимального отражения) и отсюда часть $1 - |R| = 0,83$ падающей энергии, входящей внутрь самой стены и там поглощаемой. Заметив, что M меняется по закону $\frac{1}{\omega}$, приходим к следующему ряду значений $|R|$ и $1 - |R|$, которые графически иллюстрируют поведение стенки по отношению к падающим на нее звуковым волнам в воздухе.

Таблица

теоретических коэффициентов отражения и поглощения для стенки, рассматриваемой как сотовая структура с тесно расположенными сотами.

Диаметр трубок 0,02 см

Частота f	Коэффициент сопротивления M	Коэффициент отражения $ R $	Коэффициент поглощения $1 - R $
200	2	0,38	0,62
400	$\sqrt{2}$	0,28	0,72
800	1	0,20	0,80
1600	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,17 (min)	0,83 (max)
3200	$\frac{1}{2}$	0,20	0,80
6400	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0,28	0,72

Прежде всего отметим, что так как M меняется по закону $\frac{1}{r_0\omega}$, то соответствующие значения M , $|R|$ и $1 - |R|$ сместятся в сторону более низких частот, если сделать r_0 более, чем $0,01$ см, т. е. если стенка более грубого строения. Если, например, $r_0 = 0,01\sqrt{2}$ см, то частота, соответствующая величинам какой-либо строки таблицы, будет понижена на одну октаву.

Если представить графически изменение коэффициента поглощения с частотой, то получится как бы хорошая кривая резонанса. Такое сходство, очевидно, случайно, так как в рассматриваемой задаче не делалось никаких предположений относительно возможности резонансных явлений или избирательного поглощения (вида, описанного в § 47). Все же, на основании результатов приведенной простейшей теории поглощения звука¹⁾ пористыми телами можно заключить, что нет такого однородного материала, который отражал и поглощал бы звуковые волны всех частот равномерно. Читатель, однако, не должен смешивать избирательность, зависящую только от пористости с избирательным поглощением, основанном на резонансе в слоях поглощающего материала. Последнее явление будет описано подробнее в § 52. Оба явления, конечно, в действительности накладываются при употреблении таких материалов как войлок и т. п.

Изученная нами сотовая структура обладает высоким коэффициентом поглощения, так как вся ее поверхность способна пропускать звук. Можно, однако, легко имитировать более или менее проницаемую стенку, наполняя часть отверстий материалом с бесконечной жесткостью; при этом нужно следить за однообразным распределением заполненных отверстий, чтобы на любой части поверхности соотношение между площадью отверстий и сплошной площадью было одинаково. Мы получим в таком случае простое увеличение сопротивления стенки. Если a — часть поверхности, занятая отверстиями, и b — сплошная часть поверхности, то раньше, когда a и b представляли поверхности, сплошь занятые отверстиями, сопротивление на единицу поверхности от a и b , включенных параллельно, было равно Z или, складывая податливости, мы имели

$$\frac{1}{Z} = \frac{a}{Z} + \frac{b}{Z},$$

так как $a + b = 1$.

Теперь, поскольку сопротивление части b равно бесконечности, сопротивление стены на единицу поверхности уже не равно Z , а $Z' \equiv \frac{Z}{a}$; здесь a может быть сделано любой правильной дробью. Подставляя Z' вместо Z в (266) и (267), получаем для коэффициента отражения измененной стены

$$|R| = \frac{2M^2 - 2Ma + a^2}{2M^2 + 2Ma + a^2}. \quad (267a)$$

(К тому же результату мы придем, применяя уравнение непрерывности к потоку вблизи отверстий, см. Рэлей, II, § 351). Из (267a) видим, что для данного значения M (т. е. для постоянного сопротивления на каждую трубку) отражающая способность стены возрастает с уменьшением a ;

¹⁾ Суть примененного нами классического метода определяется следующим замечанием П. Сэбина (Phys. Rev., XVII, 1921, стр. 379): „Опыт показал, что изменение поглощения с изменением толщины (для волосяного войлока) следует тому же закону, как и уменьшение потока энергии струи воздуха, проходящей через материал. Рассеяние энергии потока, проходящего через материал при постоянном давлении при увеличении толщины материала приближается к предельному значению“. Иными словами, механизм рассеяния в узких отверстиях и при статическом и при динамическом режимах по существу одинаков.

в конце концов, когда α равно нулю, т. е. когда все трубы наглухо закрыты, (R) становится равным единице.

До сих пор мы разбирали в общих чертах явления отражения и поглощения прежде всего для их понимания. Практически достаточно изучить эти свойства более эмпирическим способом; это и необходимо, так как практика в области архитектурной акустики интересуется применением материалов с примерно известным коэффициентом отражения и поглощения для управления реверберацией. Один из способов измерения поглощающей способности материала уже был описан, см. опыт Венте (§ 34); возможно применение и более старых способов, например данного Сэбином, основанного на соотношении между реверберацией, размерами помещения и полным поглощением ограничивающей поверхности. В качестве стандартного коэффициента поглощения Сэбин вполне логично взял коэффициент свободной среды или более точно открытого окна площадью в 1 кв. м¹). Посредством этого стандарта он выразил поглощающие способности, например, стен (на 1 кв. м), мебели (на 1 штуку) и публики (на 1 лицо). (Большое число данных о поглощении приведено в его „Сборнике статей“, например, на стр. 52—60).

Польза этих данных выявится в дальнейшем при разборе явления реверберации.

§ 52. Слои из поглощающего материала.

Если покрыть твердую поверхность стены слоем поглощающего материала (например, войлоком толщиной в 1 дм.) и если звуковые волны не затухнут при прохождении 1 раз вперед и назад в толще материала, то становится необходимым принять во внимание многократное отражение в слое и, следовательно, появление звуковых волн изнутри слоя, что увеличивает его общую отражающую способность. Соответствующим измерением можно грубо определить коэффициенты отражения и поглощения, причем получаемые результаты оказываются достаточно точными для инженерных целей; желательно все же выразить их при помощи постоянных, основанных на теории распространения звуковых волн в поглощающем материале.

Имеется, вообще говоря, два метода решения вопроса: их можно назвать методом сопротивления и волновым методом. Они оба эмпирические; для применения любого из них мы предполагаем, что звуковые волны распространяются в материале согласно известному уравнению²⁾:

¹⁾ Р. Е. Sabine (Phys. Rev., XIX, 1922, стр. 402) обратил внимание на то, что вследствие диффракции не только площадь, но и форма поглощающей поверхности или окна будет влиять на поглощающую способность. Некоторое отражение имеет место также от открытого окна. Из измерений Р. Е. Sabine можно заключить, что чем меньше и уже отверстие, тем больше коэффициент прохождения на единицу площади. Первоначальные измерения W. C. Sabine проводились методом подстановки, причем стандартом для сравнения служили пуховые подушки, поглощение которых сравнивалось с поглощением открытых окон в предположении, что последние пропускают совершенно и пропорционально их площади. В своей более поздней работе он определял коэффициент поглощения данного материала путем введения известной площади материала. Полная поглощающая способность комнат определялась опытом „четырёх органных труб“.

²⁾ П. Сэбином установлено (Phys. Rev., XVII, 1921, стр. 378), что для пористого материала (волосяной войлок) „логарифм уменьшения интенсивности прошедшего звука пропорционален толщине материала, через который звук прошел“ в согласии с предположением уравнения (268). Коэффициенты поглощения, измеренные П. Сэбином, меняются с частотой в соответствии с типичными кривыми для войлока, полученными П. Сэбином и упоминаемым в конце § 52 (см. также Р. Е. Sabine Am. Arch., сентябрь 1921, стр. 215 и октябрь 1921, стр. 266). Работы П. Сэбина по изучению поглощающей способности материалов и по другим вопросам архитектурной акустики велись и продолжаются в лаборатории У. К. Сэбина в Ривербэнке. Устройство этой лаборатории описано в Am. Arch. 116, 1919, стр. 133—138.

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 e^{-(\alpha + \beta)x} e^{i\omega t}, \quad (268)$$

в котором α и β (коэффициенты затухания и фазы) должны быть определены из опыта.

Коэффициент β определен, если известна фазовая скорость $c' = \frac{\omega}{\beta}$. Необходимо также знать или плотность (ρ'), или сопротивление излучения $R_2 \equiv \rho' c'$; в этом выражении c' , примерно, равно фазовой скорости. (Это в предположении, что α^2 несоизмеримо с β^2 ; мы теперь имеем дело с материалом, постоянные упругости, плотности и рассеяния которого отличны от таковых же для чистого воздуха в узкой трубке, для которой мы в предыдущем параграфе определяли $\alpha = \beta$. В настоящем случае вследствие инерции материала c' будет меньше, чем скорость звука в соседней газовой среде; далее c' еще уменьшается от влияния величины второго порядка, зависящей от α , и α само меняется в соответствии с отношением рассеяния к плотности среды. В результате нам следует принять $\beta > \alpha$ при всех частотах, кроме самых низких. Строго говоря, $R_2 \equiv \rho' c'$ есть величина комплексная; однако, здесь мы считаем c' приближенно за фазовую скорость, являющуюся вещественной величиной). Если эти основные константы нам известны, мы можем оценить характеристики поглощения и отражения звука для данного материала в любой конфигурации. Плотность можно, конечно, определить взвешиванием; однако, вследствие сложности структуры поглощающих материалов и изменения их свойств с изменением степени уплотнения обычно невозможно получить точные значения для других величин.

Если известны свойства материалов, то для определения отражающей способности конечного слоя лучше всего применить метод сопротивления. Например, если слой набит на твердую стену, то задача сходна с задачей о трубе, закрытой с одного конца, которая была решена в § 32 в предположении отсутствия рассеяния в среде. Так, для сопротивления трубы длиной l в точке возбуждения было найдено

$$Z_0 = -i\rho c \operatorname{ctg} \beta l. \quad (136b)$$

Этот результат может быть применен к задаче о поглощающем слое, если вместо ρc подставить сопротивление излучения R_2 , характеризующее материал, и вместо β — соответствующее значение $\beta - i\alpha$, учитывающее рассеяние. Тогда последнее уравнение получит вид:

$$Z_0' = R_2 \frac{\cos(\beta - i\alpha)l}{i \sin(\beta - i\alpha)l} = R_2 \operatorname{ctgh}(\alpha + i\beta) \cdot l, \quad (269)$$

что и определяет теоретически сопротивление слоя. Сравнение этого сопротивления с сопротивлением прилегающей свободной среды, с использованием; как и раньше, уравнения (120), дает (амплитудный) коэффициент отражения для слоя по абсолютной величине и фазе.

Если, наоборот, постоянные материала неизвестны и желательно их измерить, то известные практические преимущества представляет метод, названный нами волновым. Разница между двумя методами состоит только в точке зрения; оба приводят к одинаковым результатам, однако, может представить интерес проверка этого утверждения.

Предположим, что при помощи какой-либо схемы, вроде схемы Венте (§ 34), мы грубо измерили коэффициент отражения слоя, наложенного на

твердую стену, и пусть мы желаем узнать точную величину этого коэффициента, т. е. коэффициента отражения на грани бесконечно толстого слоя. Пусть эта последняя величина есть r ; тогда на единицу амплитуды падающей волны амплитуда входящей волны согласно уравнению (120a) (§ 31) будет

$$\xi_2 = t_{12} = \frac{2R_1}{R_1 + R_2} = \frac{2}{1 + R}, \quad (120a)$$

где R_2 — сопротивление излучения поглощающего материала и R — относительное сопротивление излучения по отношению к другой среде. На том же основании коэффициент отражения

$$r = -\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = \frac{1 - R}{1 + R}, \quad (120)$$

к чему мы должны добавить прежде полученные соотношения:

$$t_{21} = \frac{2R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2R}{1 + R}, \quad t_{12}t_{21} = 1 - r^2. \quad (120a)$$

При прохождении сквозь слой к твердой стене амплитуда t_{12} становится равной $t_{12}e^{-(\alpha+i\beta)l}$ или, короче, $t_{12}e^{-x}$. При отражении от стены происходит изменение фазы на -1 и при обратном прохождении сквозь слой снова перемена фазы на e^{-x} ; в конце концов при выходе из слоя на границе получается уменьшение амплитуды в отношении $t_{21}:1$. Суммируя все эти явления, имеем для первой отраженной изнутри волны при ее выходе из слоя амплитуду

$$\xi_2 = -t_{12} \cdot t_{21} \cdot e^{-2l} = -(1 - r^2)e^{-2x}.$$

Она складывается с амплитудой $\xi_1 = r$, отраженной от внешней стороны волны.

Следя за второй, отраженной изнутри волной, замечаем, что на границе слоя она обладает амплитудой $-t_{12}e^{-2x}(-r)$ и после прохождения сквозь слой, отражения от стены и обратного выхода эта амплитуда становится равной:

$$\xi_3 = +t_{12} \cdot t_{12} - (-r)e^{-4x} + -r(1 - r^2)e^{-4x}.$$

Следовательно, результирующая амплитуда отраженной от слоя волны будет

$$\xi_r = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots = -(1r - r^2)e^{-2x} - r(1 - r^2)e^{-4x} \dots \quad (270)$$

или иначе

$$\xi_2 = \Sigma \xi_j = r \frac{(1 - r^2)e^{-2x}}{1 - re^{-2x}} \cdot \frac{r - e^{-2x}}{1 - re^{-2x}}, \quad (270a)$$

если взять сумму членов сходящегося геометрического ряда. Преимущество последнего выражения — в том, что если ξ_r (отношение амплитуд отраженной и проходящей волны) найдено для нескольких разных значений толщины материала, то величины r и $e^{-x} = e^{-(\alpha+i\beta)l}$ могут быть определены из совместных уравнений, содержащих опытные данные. При решении этих уравнений приходится делать некоторые упрощения, которые лучше выбирать для каждого данного ряда опытных величин. Теоретически решая задачу о трех слоях различной толщины (см. задачу 41), имеем возможность разделить r , α и β — эти важнейшие три постоянные

поглощающей среды. Знание r , очевидно, равносильно знанию R_2 , так как R_1 известно; уравнение (270a) легко получить путем подстановки вместо R_2 в (120) значения Z_0' из (269).

Для дальнейшей иллюстрации „волновой“ точки зрения и грубого определения фазовой скорости для реального материала можно рассмотреть

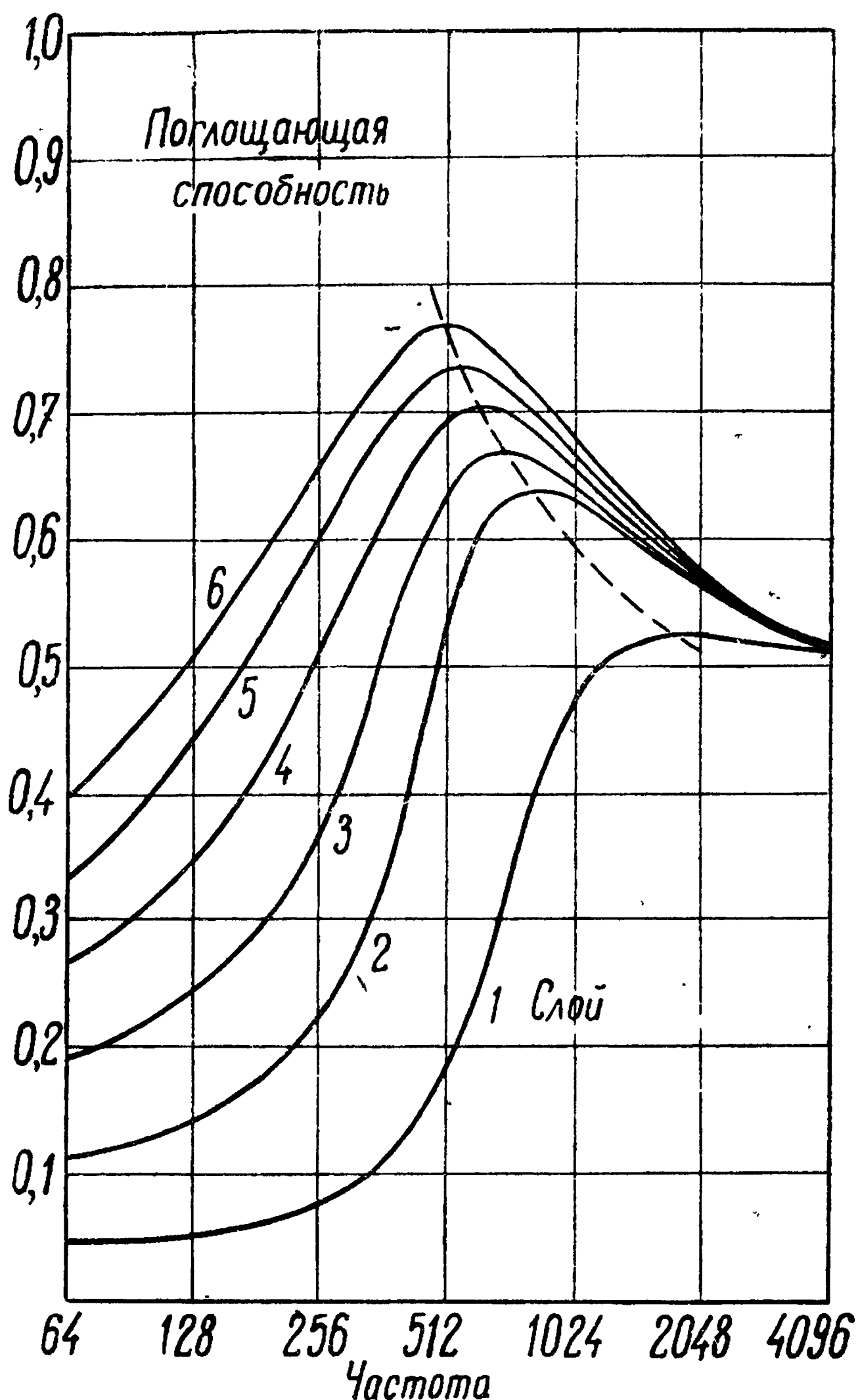


Рис. 20. Поглощающая способность одного сорта войлока в слоях, толщина которых возрастает как кратное 1,1 см.

некоторые данные Сэбина, полученные для одного из сортов войлока. Войлок был шерстяной и весьма пористый. На рис. 20 показаны значения коэффициентов поглощения для слоев этого материала разной толщины ¹⁾.

Первый слой имел толщину 1,1 см, второй—2,2 см и так далее каждый следующий на 1,1 см толще предыдущего. Ясно выражено возрастание поглощения с толщиной, особенно при низких частотах; следует отметить

¹⁾ W. C. Sabine, Proc. Am. Acad., XL'I июнь, 1906, „Сборник статей“, стр. 99, фиг. 12 и 13.

также сдвиг максимального коэффициента поглощения в сторону более низких частот с увеличением толщины слоя. Сэбин объясняет это некоторыми резонансными свойствами материала; при достаточной толщине слоя можно предполагать наличие в нем стоячих волн или же причиной описываемого явления служит простое сжатие. Если отвлечься от того

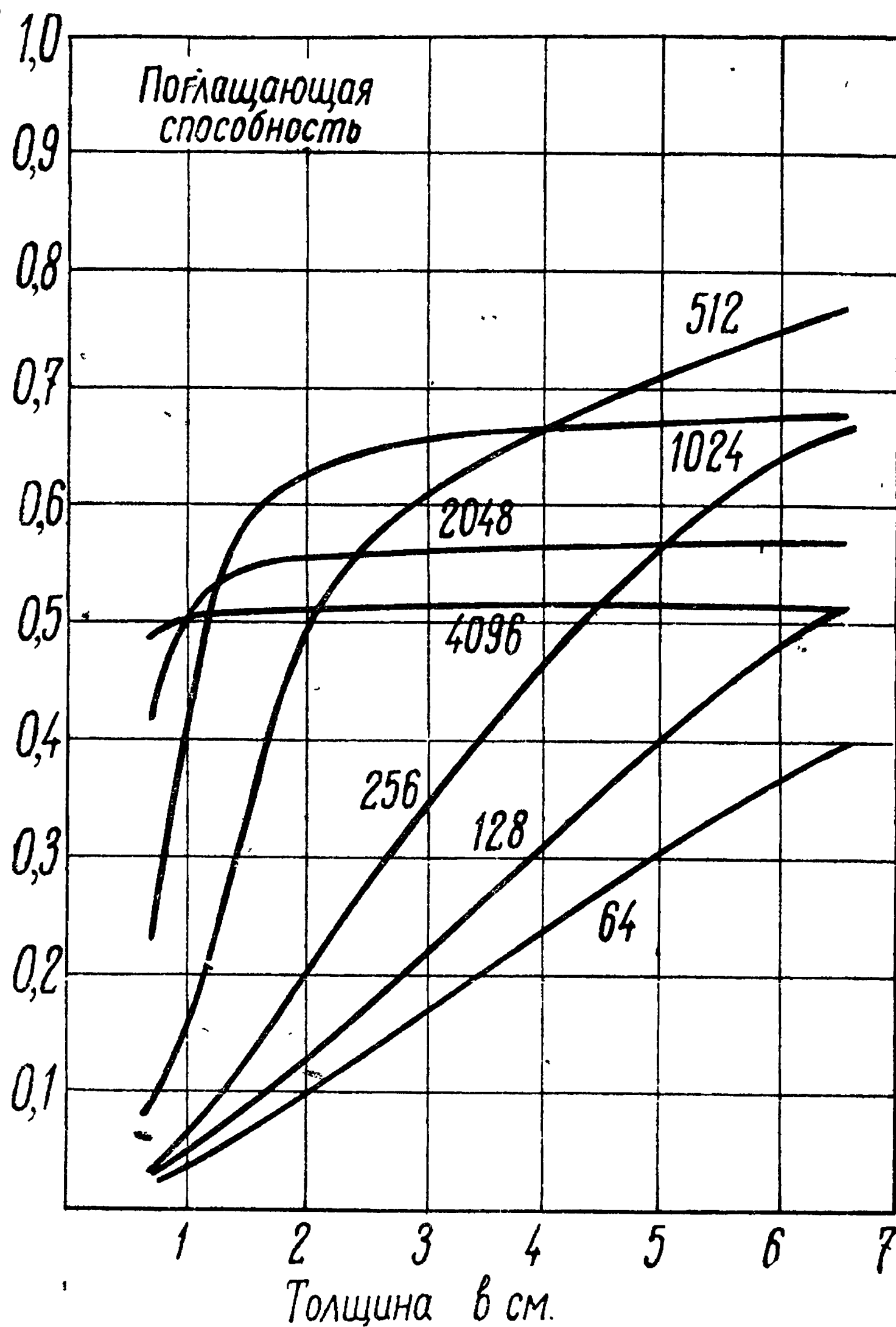


Рис. 21. Данные рис. 20, перестроенные так, чтобы показать для различных частот изменение поглощающей способности с частотой.

факта, что уже вследствие одной пористости материала наибольшее поглощение получится при определенной частоте, можно предположить, что резонанс (а следовательно, избирательное поглощение) будет получаться обычно, если слой материала имеет толщину, равную одной четверти длины волны. Отсюда можно приблизительно определить фазовую скорость в материале, так как $\lambda f = c'$. Мы видим из кривых, что частоты, соответствующие максимальному поглощению, суть 2048, 1024, 725, 610, 512 и 480

если начинать с самого тонкого слоя. Умножая каждую из этих цифр на учетверенную соответствующую толщину, получаем ряд значений c' в пределах $0,91 \times 10^4$ и $1,27 \times 10^4$, что дает среднюю величину $1,01 \times 10^4$. Это и есть приближенно фазовая скорость в материале; полученных (кажущихся) более высоких значений c' для толстых слоев мы и должны были ожидать, так как в этих случаях (кажущаяся) частота максимального избирательного поглощения несомненно возросла благодаря присутствию более высокой частоты максимального поглощения вследствие одной лишь пористости. Явление увеличения затухания при более высоких частотах также ведет к понижению частоты избирательного поглощения более тонких слоев. На рис. 21 те же данные нанесены в виде коэффициентов поглощения как функции толщины, причем каждая кривая относится к определенной частоте. „Эти кривые показывают необходимую толщину для практически наибольшего ¹⁾ поглощения“. Из рассмотрения кривых очевидно (за одним исключением), что они стремятся пройти через начало координат, т. е. при нулевой толщине поглощения были бы ничтожны. Сэбин объясняет это тем, что отсутствует эффект рассеяния вследствие трения о поверхность; мы раньше не принимали во внимание этого рассуждения, но здесь следует отметить, что это законно. Наиболее существенно, что это семейство кривых показывает, что для волн более высокой частоты затухание в материале значительно больше, причем двойной толщины достаточно для получения максимального поглощения при $f > 1024$. Наконец, можно заметить, что повышенное затухание увеличит понижение фазовой скорости при более высоких частотах; о следствиях такого понижения упоминалось в предыдущем параграфе.

На практике встречается необходимость пользоваться составными поглощающими устройствами, составленными из слоев различных материалов; теоретически для изучения всех подобных случаев изложенные методы пригодны, однако, соотношения между различными величинами получаются настолько сложными, что методы лишаются практической ценности. Здесь решающим фактором должен стать опыт; все же во многих случаях исследование упрощается при пользовании изложенной теорией как руководством при изучении сложных материалов.

Измерение утечки звуковой энергии из помещений (вследствие передачи через окно, двери, перегородки, трещины в стенах и т. д.), хотя на первый взгляд не имеет отношения к настоящему рассмотрению поглощения, все же занимает свое место в архитектурной акустике и о ней следует упомянуть. Эти утечки вызывают добавочное рассеяние из помещения, т. е. фактическое возрастание поглощающей способности на граничных поверхностях. Первое опытное исследование явления произведено У. Сэбином ²⁾ после этого много опытов проделали П. Сэбин ³⁾ и Вотсон ⁴⁾ (F. R. Watson) с целью установить точные коэффициенты передачи для дверей, перегородок и др. Наконец, имеется весьма содержательная статья Бекингэма ⁵⁾ (E. Buckingham), которая не только рассматри-

¹⁾ P. E. Sabine loc. cit.: „Значения коэффициента поглощения (для войлока) оказались увеличивающимися с увеличением толщины материала, однако, они приближаются к предельным значениям, которые при высоких частотах достигаются уже при более тонких слоях“.

²⁾ The Brickbuilder, XXIV, февр. 1915 г. или „Статьи“, стр. 237. „Звукоизоляция“.

³⁾ P. E. Sabine Am. Arch., июль, 28, 1920 „Передача звука через двери и окна“ или см. там же, сентябрь 28 и октябрь 12, oi 1921 и июль 4, 1923, причем последняя статья трактует о передаче сквозь стены; см. также Phys. Rev., 27, 1926, стр. 116.

⁴⁾ F. R. Watson, Univ. of Illinois Ecg. Exp., Sta., Бюллетень № 127, 1922, „Звуконепроницаемые перегородки“; см. также его „Акустика зданий“ New. York, Wiley, 1923.

⁵⁾ U. S. Bureau of Standards. Sci Paper, № 506, май 26, 1925.

вает теорию передачи звука сквозь стены, но дает также анализ реверберации, что может интересовать читателя в связи с теорией последующего § 54.

§ 53. Реверберация в замкнутой трубе ¹⁾.

Естественный путь к общей теории реверберации лежит через анализ явлений, происходящих в длинной трубе однородного сечения, закрытой на обоих концах поглощающими стенками и снабженной у одного конца малым источником звука. Источник, излучая звук постоянной интенсивности, посылает внутрь трубы волны любой желаемой длины. Поглощение энергии на концах трубы пропорционально плотности энергии в трубе, и так как плотность энергии в трубе постоянно возрастает вследствие излучения источника, то спустя некоторое время после начала работы источника наступает равновесие между излучаемой и поглощаемой энергией. Таким образом, первое, что следует отметить, будет асимптотическое нарастание плотности энергии до установившегося значения; и, наоборот, при выключении источника звука энергия в замкнутом пространстве, убывая по экспоненциальному закону, стремится к нулю. Таким образом, изменение со временем плотности энергии не следует строго за изменением излучаемой энергии; мы получаем характерное явление реверберации. Средняя плотность энергии принята за независимую переменную, посредством которой удобнее всего в нашей теории выражать остальные величины, не считаясь с частотой или фазой.

Пусть генератор звука излучает внутрь трубы группу волн с плотностью энергии E_1 ; тогда мощность генератора равна cE_1 плюс та мощность, которая теряется на месте вследствие наличия поглощающей поверхности на ближайшем конце трубы. Длина трубы равна l , коэффициент поглощения (энергии) стенки у каждого конца равен $A \equiv 1 - R$, где R — коэффициент отражения (энергии). Время, потребное для n отражений первоначальной волны от стены трубы, немного более, чем $\frac{nl}{c}$; число отражений в секунду $m \equiv \frac{c}{l}$ и средний свободный путь между отражением равен l . Чтобы найти плотность энергии в любой момент после начала работы генератора, следует к первоначальной плотности энергии E_1 прибавить плотность однократно отраженной волны (RE_1), дважды отраженной и т. д.; поэтому спустя время $t = \frac{nl}{c}$ плотность энергии равна:

$$\begin{aligned} E_n &= E_1 (1 + R + R^2 + \dots + R^{n-1}) = \\ &= \frac{E_1 (1 - R^n)}{1 - R} = \frac{E_1}{A} (1 - R^n), \end{aligned} \quad (271)$$

если взять сумму конечной геометрической прогрессии. Выражая через время, имеем

$$E_n = \frac{E_1}{A} \left(1 - R^{\frac{ct}{l}} \right) = \frac{E_1}{A} \left(1 - e^{-\frac{A'ct}{l}} \right) \quad (271a)$$

полагая $e^{-A'} = R$. Величина A' того же порядка, что и A ; так как $-A' = \lg R = \lg (1 - A)$, то, разворачивая, имеем

$$A' = A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \dots \quad (272)$$

¹⁾ В этом и последующих параграфах при переводе произведены некоторые сокращения оригинального текста в описательной и справочной частях (прим. ред.).

Из (271a) замечаем, что скорость нарастания плотности энергии меняется прямо пропорционально A' , однако, максимальная плотность энергии, достигается в конце концов при установившемся состоянии, меняется обратно пропорционально A . Другими словами, большой коэффициент поглощения граничной поверхности делает данный объем более чувствительным к изменению мощности у источника за счет уменьшения максимальной плотности энергии, т. е. громкости.

Рост плотности энергии при постоянной мощности источника аналогичен росту заряда конденсатора с утечкой заряжаемого постоянным по величине и направлению током. Это происходит согласно закону

$$\frac{Q}{C} = IR \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}} \right), \quad (273)$$

где I — постоянный заряжающий ток, C — емкость и R — сопротивление утечки между обкладками конденсатора, $\frac{Q}{C}$ — плотность заряда аналогична плотности энергии E . Зарядный ток I аналогичен E_1 . Проводимость $\frac{1}{R}$ аналогична поглощающей способности A , а емкость C соответствует объему l трубы; таким образом, аналогия полная.

Пусть теперь звуковой генератор выключается, причем к этому моменту плотность энергии достигла величины $\frac{E_1}{A}$. Число отражений в единицу времени равно $m = \frac{c}{l}$; при прохождении волн вперед и назад между поглощающими поверхностями, при каждом отражении поглощается количество энергии $A \cdot E$. Поэтому скорость изменения плотности энергии в трубе равна:

$$\frac{dE}{dt} = -mAE. \quad (274)$$

Решение этого уравнения совместно с граничным условием, выражающее закон убывания плотности энергии, будет

$$E = \frac{E_1}{A} e^{-\frac{c}{l} At}. \quad (274a)$$

Электрическая аналогия остается прежней, причем уравнение разряда конденсатора с утечкой будет

$$\frac{Q}{C} = IR e^{-\frac{t}{CR}}. \quad (275)$$

Весьма правильное понятие о том, что значат ходовые выражения „наполнить комнату звуком“ или „заглушить помещение“ (для уменьшения реверберации) можно себе составить, если привести другую аналогию. В § 48 мы нашли, что плотность энергии излучения эквивалентна давлению излучения, эффекту статическому. Следовательно, для данного случая мы можем заменить непрерывное излучение сжимаемой жидкостью, плотность и давление которой пропорциональны плотности излучения.

Жидкость вводится источником с постоянной скоростью, давление внутри возрастает до тех пор, пока скорость убывания жидкости от утечки или поглощения не сравняется со скоростью пополнения; наконец, если пополнение прекращено, то давление уменьшается со скоростью, пропорциональной произведению давления на проводимость утечек или полному коэффициенту поглощения оболочки. В этом основная идея ме-

ханизма реверберации, которую можно применить к объему любого вида, соответственно внося поправки в отдельные детали.

Обозначим через T „время реверберации“ данного объема, время, потребное для того, чтобы плотность энергии упала от одного заданного уровня до другого. Тогда, если известны две из величин T , A или l , можно, согласно (274а), вычислить третью. Пусть индексы 1 и 2 относятся к двум уровням энергии; тогда, если $E_1 > E_2$, имеем непосредственно

$$\frac{E_2}{E_1} = e^{-\frac{c}{l} AT} \text{ или } AT = -\frac{l}{c} \ln \frac{E_1}{E_2}. \quad (276)$$

Это уравнение выражает так называемый первый закон архитектурной акустики, он будет обобщен в § 54 для охвата всех случаев практики и получит вид: $AT = KV$, где V — объем помещения и K — постоянная. Займемся определением A через T при данном l (или V). У. Сэбин произвел многочисленные опыты, беря за E_2 порог слышимости (минимум) и за E_1 уровень в 10^6 раз больше. Меняя поглощающую способность данного помещения, т. е. добавляя или убирая поглощающие материалы на полу или стенах, он, пользуясь равенствами $A_1 T_1 = A_2 T_2$, мог измерить поглощающие способности различных материалов, предметов и т. д., сравнивая их с действием открытого окна площадью, равной единице, для которого он полагал $A = 1$. Было неудобно покрывать большую комнату целиком материалом с однородными поглощающими свойствами, поэтому был сделан ряд различных опытов для накопления достаточного разнообразия данных о поглощении для практических нужд, но когда эти данные были, наконец, собраны, то оказалось, что процесс может быть обращен и что путем вычисления полной поглощающей способности ограничивающих помещение поверхностей и находящихся в нем предметов, можно предсказать достаточно точно время реверберации.

Опыт Сэбина велся в трудных условиях и был весьма кропотлив, так как в то время не было тех приборов, какими располагает современная лабораторная практика.

Все же с практической точки зрения методы „малого масштаба“, основанные на механике звука в трубах и независимые от реверберации, представляют определенные преимущества для определения коэффициента поглощения и отражения поверхностей из однородных материалов. Легко соорудить в лаборатории компактную установку вроде установки Венте, о которой мы упоминали (§ 34 и § 52) и в которой для излучения и приема звука применимы электрические аппараты. Из немногих отсчетов по приборам переменного тока можно получить легко обрабатываемые данные, дающие точность не меньше полученных ранее сложными методами реверберации. Здесь снова мы имеем пример применения новейших теорий и техники в современной акустике.

§ 54. Реверберация в трех измерениях.

Применим изложенные в предыдущем параграфе принципы для получения формул Сэбина для реверберации в трехмерном замкнутом пространстве. Рассмотрим сначала его коэффициент α — полную поглощающую способность помещения. Это не есть отвлеченное число (т. е. отношение значений энергии), а имеет размерность площади; оно определяется из выражения

$$\alpha = A_1 S_1 + A_2 S_2 + \dots + A_n S_n, \quad (277)$$

каждый член которого представляет произведение площади S_j одной из составляющих поверхностей на ее коэффициент поглощения, отнесенный к равновеликой площади открытого окна. Так для 6 кв. м ковра с коэффициентом поглощения A_j мы получили бы для полной поглощающей способности 6 A_j . Очевидно, разделив α на $\sum S_j$ мы получим „действующую“ среднюю поглощающую способность всей ограничивающей поверхности в целом, которая должна совпасть с величиной A § 53. Следовательно:

$$A = \frac{\alpha}{S} = \frac{\sum A_j S_j}{\sum S_j}, \quad (S = \sum S_j), \quad (278)$$

причем разумеется, что суммирование произведено по всей ограничивающей поверхности с учетом всех особенностей ее конфигурации и местных поглощающих свойств. Отсюда видно, что мы считаем все части поверхности в отношении потребления энергии в одинаковых условиях, что не противоречит принятой нами статической аналогии. Формула подтверждается опытами Сэбина, неизменно дававшими хорошие совпадения с вычисленными данными.

Чтобы включить в рассмотрение объем V , вводят коэффициент p , названный Сэбином „средний свободный путь между отражениями“. В § 53 это, очевидно, была длина трубы (l).

Рядом экспериментов Сэбин установил соотношение $p = 0,62 \sqrt[3]{V}$, что означает, что средний свободный путь между отражениями (являющийся некоторой идеальной акустической мерой, не зависящей от длины, ширины и формы данного замкнутого объема), несколько короче, чем кубический корень из объема.

Подставляя в (276) вместо l величину p и вместо A отношение $\frac{\alpha}{S}$, получаем общее уравнение реверберации в объеме V

$$\frac{E_2}{E_1} = e^{-\frac{c\alpha T}{0,62 S \sqrt[3]{V}}}. \quad (279)$$

Для исключения S заметим, что для помещения с разумно пропорциональными размерами $S \sqrt[3]{V} = 6V$, так как объем любого элементарного конуса с основанием dS на границе помещения равен (почти точно) одной трети произведения основания на величину $\frac{\sqrt[3]{V}}{2}$.

Тогда получаем основное соотношение

$$\alpha T = \frac{0,62 (6V)}{c} \ln \frac{E_1}{E_2} = KV, \quad (280)$$

на значение которого уже указывалось. Для стандартного отношения (206) (принятого и Сэбином) $\frac{E_1}{E_2} = 10^6$ и, полагая $c = 340$ м в секунду, получаем

$$K = 0,15 \text{ секунд на метр.} \quad (280a)$$

Сэбин считает наиболее достоверной¹⁾ величиной $K = 0,164$; несовпадение происходит от очень приближенного характера наших вычислений и неточного определения величины p .²⁾

¹⁾ American Architect, 1900, „Реверберации“; также „Сборник статей“, стр. 50.

²⁾ W. C. Sabine „Статьи“, стр. 40.

Можно было бы с успехом решать задачу вычисления среднего свободного пути p , что означает вывести закон архитектурной акустики (уравнение 272), а priori.

Такое вычисление впервые произведено Франклином (W. S. Franklin Phys. Rev., XVI, 1903, стр. 372); сходное вычисление имеется у Бекингема¹⁾ и использовано Экхардтом²⁾ в интересной статье о реверберациях.

Согласно этой теории, число единиц энергии, приходящей со всех направлений в единицу времени на поверхность dS , равно $\frac{Ec \cdot dS}{4}$ в предположении, что все приходящие волны обладают одинаковой плотностью энергии E . Количество энергии, поглощенное в единицу времени поверхностью S , равно $\frac{AS \cdot Ec}{4} = \frac{aEc}{4}$, где a — коэффициент поверхностного поглощения Сэбина. Если мощность источника $\bar{E}$, то дифференциальное уравнение для плотности энергии в замкнутом объеме V будет

$$V \frac{dE}{dt} + \frac{1}{4} caE = \bar{E}. \quad (281)$$

Решение его для частного случая спадаения с уровня плотности энергии E_1 будет

$$\frac{E}{E_1} = e^{-\frac{ca}{4V}t}, \quad (282)$$

тогда как для случая нарастания плотности энергии до максимума решение будет

$$E = \frac{4\bar{E}}{ac} \left(1 - e^{-\frac{ca}{4V}t} \right), \quad (283)$$

так как при $t = \infty$ скорость поглощения энергии стенками помещения должна равняться генерируемой мощности.

Уравнение (282) совпадает с (279), если заменить в нем постоянную ($0,62 \times 6 = 3,72$) на 4; или, что то же самое, если положить средний свободный путь равным $0,67 \sqrt[3]{V}$. Пользуясь этим теоретическим значением p , имеем вместо (280а) $K = 0,161$, что хорошо совпадает с экспериментальным результатом Сэбина ($K = 0,165$).

Статья Экхардта содержит ряд графиков, иллюстрирующих нарастание и убывание плотности энергии в помещениях с разными поглощающими способностями. Между прочим заметим, что на основании (282) и (283) можно дать другое определение времени реверберации, именно так: время падения с уровня максимальной плотности энергии, созданного источником постоянной мощности, находящимся в помещении. Это более новое понятие (введенное П. Сэбином) и мы к нему вернемся после дальнейшего рассмотрения приложений идей У. Сэбина.

Характерное применение теории архитектурной акустики У. Сэбин произвел, когда консультировал проект конструкции и внутреннего оформления концертного зала (Symphony Hall) в Бостоне³⁾.

Было решено соорудить помещение, акустические свойства которого (реверберация) были бы такие же, как и Gewandhaus (Лейпциг), но на 70% вместительнее последнего; когда новый зал был кончен, его объем был на 60% больше лейпцигского Gewandhaus. Время реверберации

¹⁾ Бюро стандартов САСШ, Sci. Paper, № 506, май 26, 1925.

²⁾ Jour. Fr. Inst., 195, 1923, стр. 799.

³⁾ W. C. Sabine, „Статьи“, стр. 60.

Gewandhaus было, по вычислениям Сэбина, 2,30 сек. с учетом заполнения публикой в дополнение к сумме поглощающих способностей всех предметов и ограничивающих поверхностей. Совместно с архитекторами концертный зал был спроектирован так, чтобы время реверберации было равно 2,31 сек. Этот проект совокупно с предварительными изысканиями, на которых он был основан, может, по справедливости, считаться классическим примером прикладной акустики. Сэбин подсчитал, что если бы просто увеличить пропорционально размеры Gewandhaus с 11 200 м³ до 25 300 м³ для получения нужной вместимости, то время реверберации оказалось бы равным 3,02 сек. Такая разница по сравнению с избранной величиной была бы очень заметна.

С целью исследования точности музыкального испытания при оценке оптимального времени реверберации, совместно с рядом компетентных музыкантов, произвел опыты для определения наилучших условий воспроизведения фортепианной музыки в пяти помещениях.¹⁾ После того, как критики сочли достигнутый результат удовлетворительным, были произведены измерения времени реверберации для каждого помещения; были получены значения $T = 0,95, 1,10, 1,10, 1,09$ и $1,16$ сек. Это определенно указывает на то, что среднее время реверберации $T = 1,08$ сек. характерно для средних размеров помещения с хорошими для данной цели акустическими данными; результат вполне согласуется с позднейшим подобного же рода исследованием.

Сэбин в недавней статье²⁾ дает следующее правило: „Время реверберации для аудитории с максимальной вместимостью, вычисленной согласно уравнения (287а) (см. ниже), должно лежать между одной и двумя секундами. При этом для речи и легкой музыки оно должно располагаться ближе к нижнему пределу этого интервала, в то время как для более громкой музыки оно должно находиться у верхнего предела“. Чтобы составить себе более полное представление об этом, рассмотрим новейшее понимание времени реверберации, на которое мы уже ссылались. Если в помещении с объемом V работает генератор постоянной мощности и коэффициент поглощения поверхности есть α , то установившаяся плотность энергии будет

$$E_1 = \frac{4\bar{E}}{\alpha c}. \quad (283a)$$

Если теперь с этого уровня начинается убывание, то, подставляя данное значение E_1 в (282), имеем

$$E = \frac{4\bar{E}}{\alpha c} e^{-\frac{\alpha c}{4V}t}, \quad (285)$$

откуда

$$t = \frac{4V}{\alpha c} \ln \frac{4\bar{E}}{\alpha c E}. \quad (286)$$

Очевидно, что если отношение начальной и конечной плотностей энергии

$$\frac{4\bar{E}}{\alpha c E} = 10^6,$$

то мы сразу возвращаемся к первому закону Сэбина, а именно:

$$\alpha T = 0,16V = KV,$$

что соответствует формуле (280а).

¹⁾ W. C. Sabine, Pros. Am. Acad.; XLII 1906, „Сборник статей“, стр. 71.

²⁾ P. E. Sabine. „Acoustics in Auditorium Design“, Am. Architect, июнь 18, 1924.

Однако, целью наших рассуждений будет отойти от представления о фиксированной начальной плотности энергии и основать определение времени реверберации на фиксированной мощности, отдаваемой источником. Это ближе соответствует практическим случаям, так как чаще придется иметь дело с источниками постоянной мощности, чем с постоянной плотностью энергии в помещениях с различными характеристиками. Опыт при этом дает лучшее соответствие между временем реверберации и качествами помещения с точки зрения художественности воспроизведения.

Следуя П. Сэбину, получим мощность источника $\bar{E}$, равной 10^{10} кубических метров звука, плотности соответствующей порогу слышимости (E)¹⁾ и получим более практическое выражение для (286), дающее время реверберации T_1 , основанное на нашем новом представлении

$$T_1 = \frac{4V}{ca} \lg_l \frac{4 \cdot 10^{10}}{ca} \tag{287}$$

Это эквивалентно ²⁾

$$aT_1 = 0,0271 \, V [8,07 - \lg_{10} a], \tag{287a}$$

что можно сопоставить с прежним определением У. Сэбина, данным в уравнениях (280, 280a); они совпадают, если $8,07 - \lg_{10} a = 6$. Можно сказать, что (287a) представляет „поправку“ к формуле Сэбина $aT = KV$ для слишком больших значений a и дает новую концепцию времени реверберации, ближе соответствующую условиям, имеющимся в концертных помещениях.

Следующая таблица дает для сравнения несколько значений T_1 , для типичных больших зал, вычисленных по П. Сэбину и T , определенных старым способом. Все залы в акустическом отношении предполагаются удовлетворительными, хотя и несовершенными.

З а л	Объем в куб. м	Число мест	T_1 по П. Сэбину	T	Автор вы- числения T
1. Массонский храм, Мадисон	8 580	1 500	1,37	1,60	П. Сэбин.
2. Дом союзов, Москва	12 500	1 600	1,44	1,75	Лифшиц.
3. Симфонический зал, Бостон	18 400	2 600	1,92	2,31	У. Сэбин.
4. Театр Истмена, Рочестер	22 400	3 340	1,65	2,08	Ватсон.
5. Театр в Чикаго	26 200	3 640	1,48	1,90	П. Сэбин.

Даже это небольшое число данных весьма показательны.

Следует заметить, что T_1 менее меняется с увеличением объема (212) помещения, чем T . П. Сэбин считает обычной средней величиной T для больших зал с хорошей акустикой 1,47 секунд, что действительно укла-

¹⁾ Это частное значение $\bar{E}$ было выбрано потому, что оно приближается к звуковой мощности органных труб, с которыми производил опыты проф. Сэбин. Далее, источник звука такой мощности дает в пустом зале емкостью 500—1000 чел. и с обитой мебелью интенсивность звука в 10^6 раз выше порога слышимости. Наконец, камерные измерения мощности музыкальных инструментов и человеческого голоса говорят за то, что указанная величина близко соответствует обычным мощностям звука, с которыми мы имеем дело в акустике помещения (из неопубликованной работы П. Сэбина).

²⁾ Уравнение (287a) написано в метрических единицах. Если a в квадратных футах и V в куб. футах, то

$$aT_1 = 0,0083 \, V (9,1 - \lg_{10} a) \tag{287a}$$

(см. П. Сэбин, loc. cit.).

дывается в пределы 1 — 2 сек., установленные выше. Наконец, отметим, что дирижер Никич считал зал Дома союзов в Москве лучшим залом в Европе. Учитывая разногласия мнений, которые (212) могут встретиться среди музыкантов относительно оптимальной величины реверберации, нам кажется правильным придерживаться во всех случаях стандарта, предложенного П. Сэбином.

С. Лифшиц¹⁾ обследовал реверберацию с художественной точки зрения, пользуясь изменением количества публики в зале для изменения поглощающей способности помещения. Оказалось, что в малом зале ($V < 350$ куб. м) оптимальное время реверберации для баритона, скрипки и виолончели одинаково и равно около 1,03 сек. Для одного оратора, говорившего в помещении объемом 126 куб. м, оптимальное время равнялось $T = 1,06$. Лифшиц предложил полуэкспериментальную, полутеоретическую формулу для оптимальной реверберации как возрастающей функции объема.

§ 55. Системы стоячих волн. Фокальные свойства помещения; акустические трудности.

Наиболее неприятным в акустике замкнутого пространства (с теоретической и практической точек зрения) является неизбежное появление системы стоячих волн. Если коэффициент поглощения стен равен единице, то условия становятся аналогичными открытому пространству; в действительности всегда имеет место отражение, и обычные материалы стен и их облицовка имеют коэффициенты поглощения, далекие от единицы. Например, для кирпичных оштукатуренных стен это будет 2 или 3% (У. Сэбин, loc. cit. в § 51); пол, покрытый ковром, имеет коэффициент до 20%, толстый слой войлока на стене — 70% при 1000 герц (Сэбин „Сборник статей“, стр. 158); наибольшее значение получается, повидимому, для публики. Сэбин дает для этой величины 0,96 на 1 кв. м. Обычный полный коэффициент поглощения ($A = \frac{a}{S}$) невелик. К примеру, кубическое помещение объемом 1000 куб. м имеет время реверберации 1,6 сек., т. е. вполне пригодно для музыкальных целей; для него, согласно (280), имеем $aT = 0,16 V$, что дает $a = 100$. Так как для такого помещения $S = 600$, то имеем $A = \frac{a}{S} = \frac{1}{6}$. Значит, в среднем требуется 4 отражения, чтобы уменьшить амплитуду данной волны до 49% ее первоначальной величины. Следовательно, в каждом помещении с „хорошей акустикой“ будет иметь место многократное отражение, достаточное для образования стоячих волн.

Анализ систем стоячих волн, не представляющий никаких затруднений в одномерной задаче с трубой, которую мы неоднократно изучали, в трехмерном пространстве чрезвычайно труден. Чтобы составить себе представление о сложности задач этого рода, рассмотрим скорее академический случай, именно установившуюся систему волн в эллипсоидальном объеме с совершенно отражающей внутренней поверхностью, в одном из фокусов которого помещен малый источник звука. Подобных условий в действительности не бывает, но пример взят только потому, что это — один из немногих случаев, допускающих математический анализ. Впрочем существует одно большое помещение, имеющее приблизительно указанную форму.

Сечение через фокусы эллипсоида приведено на рис. 22.

¹⁾ „Оптимальная реверберация в аудитории“. (Phys. Rev., 25, 1925, стр. 391). К сожалению, статья основана, повидимому, на недостаточном числе данных.

Для простоты большая ось $2a$ и междуфокусное расстояние $2d$ взяты равными целому числу длин волн, именно $2a = 8\lambda$ и $2d = 5\lambda$. В смысле общности мы при этом теряем немного. Величины a и d связаны соотношением

$$a^2 - d^2 = b^2,$$

где $2b$ — малая ось. Согласно геометрических свойств эллипса, избыточное давление в данной точке $P = (x, y)$ внутри эллипса равно сумме избыточных давлений от двух серий расходящихся и сходящихся волн, возникающих в точке F_1 . Можно считать, что одна серия волн излучается фокусом F_1 в точку P вдоль пути, обозначенного A ; в ней F_1P есть радиус расходящейся волны и F_2A_2P — радиус сходящейся волны, если $F_2A_2P > F_1P$. Длина пути $F_1A_1F_2$, равная $2a$, в расчет не идет, так как

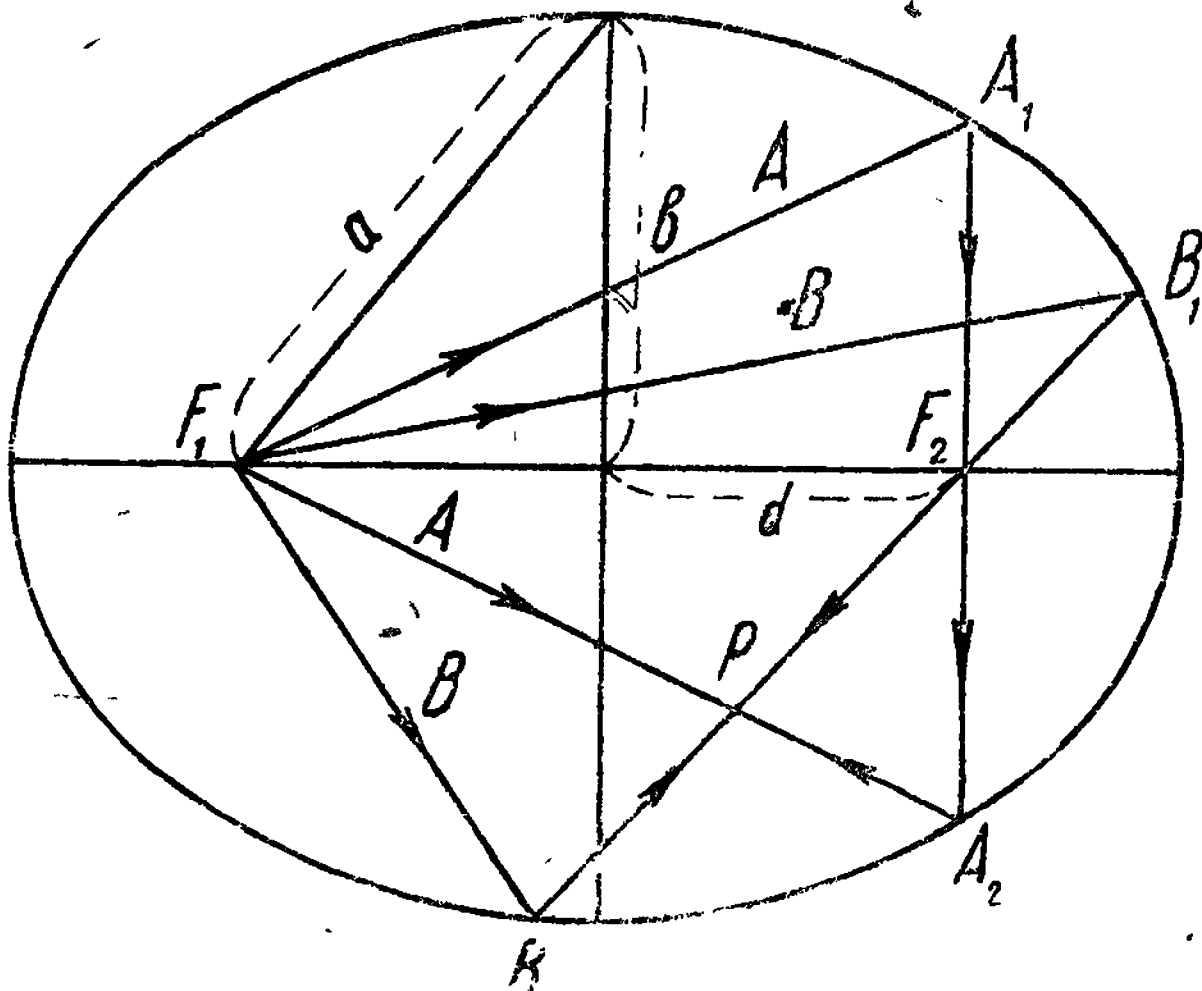


Рис. 22. Геометрия эллипса.

она равна 8λ и не вносит изменения фазы; в P получается результат такой, как если бы существовали одновременно два источника в одинаковой фазе, помещенные в F_1 и F_2 .

Иными словами, F_2 есть (положительное) изображение F_1 , если пользоваться привычной аналогией из электростатики или теории зеркал. Те же соображения относятся к другой серии волн, пути которой отмечены буквой B .

Далее, у каждой серии волн, собирающихся в произвольной точке P , радиус кривизны расходящейся и сходящейся составляющих одинаков, следовательно, максимальные амплитуды равны, и остается учесть лишь фазовые соотношения. Конструктивная интерференция (т. е. максимальное избыточное давление) серии A получится, если $F_2A_2P = F_1P + k\lambda$, где k — целое число. Геометрические места всех этих точек суть окружности радиуса $\frac{m\lambda}{2}$, где m — целое число, и с центром в F_1 ; эти окружности показаны тонкими линиями на рис. 23. На это семейство окружностей накладываются такие же окружности, имеющие центром F_2 , происходящие от волн, идущих в точку P по путям B . В точках пересечения обоих семейств окружностей избыточное давление больше, чем во всех других точках этих окружностей; здесь максимумы давлений складываются, так

как находятся в фазе. При вращении нашего эллипса вокруг оси для образования эллипсоида эти точки опишут окружности, нормальные к большой оси.

Области, ограниченные дугами окружностей между пересечениями, представляют области минимальных давлений и при вращении вокруг большой оси дадут соответствующие кольца.

Общая картина системы стоячих волн и относительные величины максимумов давления и скорости в разных точках позволяют отметить другие интересные свойства:

Пересечения расположены на конфокальных эллипсах, изображенных пунктирными линиями; они же, с другой стороны, расположены на соответствующей системе конфокальных гипербол, некоторые из коих изображены

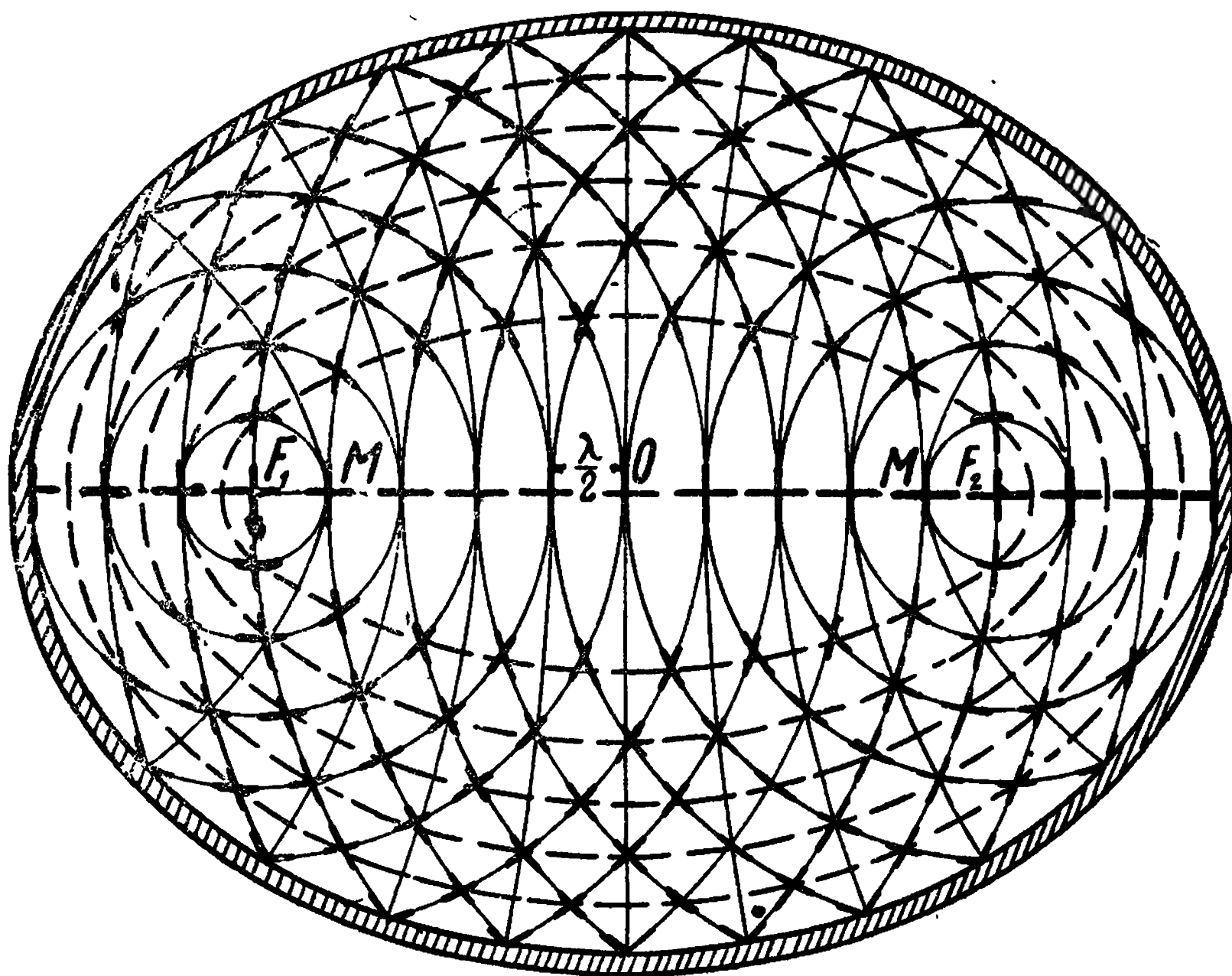


Рис. 23. Сечение системы стоячих волн в эллипсоиде n , и $2d = 5\lambda$, $2a = 8\lambda$.

на рисунке. Таким образом, вся система областей наибольшего давления определяется окружностями (и точками на большой оси), представляющими пересечения системы конфокальных эллипсоидов и гиперболоидов, расположенных так, что при переходе с одной поверхности на соседнюю происходит перемена фазы на полволны. Эти максимумы давления не все равной интенсивности или плотности энергии; если исключить из рассмотрения фокусы, то две окружности, отмеченные буквами M на рис. 23, являются точками наивысшего давления во всей системе стоячих волн.

Области максимальной скорости частиц находятся в центре элементов, имеющих форму алмаза и линзы, образованных пересекающимися окружностями.

В тех элементах, через которые проходят гиперболы, результирующая скорость в центре элемента параллельна гиперболе, т. е. нормальна к поверхности соответствующего эллипсоида; в остальных элементах результирующие скорости параллельны эллипсоидальным поверхностям; таким образом, на границе отсутствует нормальная составляющая скорости. Заметим, однако, что обычно достаточно найти распределение

максимумов давления, так как приемниками звука большей частью служат приборы, приводимые в действие давлением, как-то: диафрагмы или ухо. Наконец, отметим, что если в помещении можно найти точку F_2 , являющуюся изображением другой точки F_1 , то такое помещение явится в полном смысле „шепчущей галлереей“¹⁾, т. е. в нем отражения вызывают особое повышение плотности энергии в F_2 , если источник звука помещен в F_1 .

Очевидно, что изменение размеров или пропорций эллипсоида не внесет существенных изменений в общее распределение системы стоячих волн, если соотношения между различными параметрами таковы, что при данной частоте возникновение стоячих волн возможно. Всякое отступление от приведенного идеального случая, как-то: применение источника звука конечных размеров, помещение его вне фокуса или неправильная форма помещения, настолько усложняет дело, что теория становится бессильной. Поэтому, так как обычно априорные вычисления не применяются к большинству систем стоячих волн, пришлось бы прибегать к ряду опытов над данным помещением, по одному опыту для каждой из частот, при которой желательно получить сведения о распределении энергии (220). Результаты наблюдений над одним объектом приведены у У. Сэбина в его „Сборнике статей“²⁾ на черт. 12, стр. 152.

В помещении, где мы слушаем какие-либо звуки, могут быть самые разнообразные комбинации стоячих волн в зависимости от частоты. При сложных звуках эти комбинации взаимно накладываются и так как максимумы и минимумы для звуков разных частот никогда точно не совпадают, то мы получим так называемые „местные искажения волны“ (§ 50). Слушая продолжительный звук, независимо от того, насколько заглушенным представляется помещение (на основании изменения реверберации), можно легко получить различные впечатления от него, просто меняя немного положение головы. Если звук представляет чистый тон, то ясно ощущаются максимумы и минимумы стоячих волн; если звук сложный, то мы почувствуем существенную разницу в качестве. Если характер звуков меняется, как в музыке или речи, то распределение стоячих волн в течение ревербераций меняется, что вносит дальнейшие усложнения. Можно на опыте, слушая концерты в данном помещении, найти места, которых следует избегать вследствие чрезмерных местных волновых искажений, препятствий и тому подобное; можно здесь лишь посоветовать при переполненном зале не располагаться слишком далеко от источника звука. Если бы можно было поместить оба уха на поверхности одной из отражающих стен, то мы очутились бы в наилучших условиях восприятия звуков, так как отражающая поверхность есть единственное место максимального давления (узел скоростей) для всех частот. Мы не только ощутили бы более благоприятное распределение давления по частоте в данной точке поверхности, но, переходя от точки к точке на поверхности стены, мы обнаружили бы меньше изменений в распределении частот, чем переходя от точки к точке внутри помещения.

¹⁾ Примером служит храм великого Мормона в гор. Соленого Озера. Внутренность его имеет форму короткого вертикального цилиндра почти эллиптического сечения с куполом, близким по форме к половине эллипсоида вращения. Несмотря на эти отклонения от точно эллипсоидальной формы, помещение имеет два сопряженных фокуса, в одном из которых помещена кафедра оратора. Слышимость в разных частях зала очень различна; лучшая точка—на краю балкона в конце зала. Это—сопряженный фокус; здесь хорошо слышны слабые звуки (даже падение иглы), возникающие у кафедры: без отражений от стен это было бы невозможно вследствие большого расстояния между фокусами. Описание постройки есть у У. Сэбина.

²⁾ „Исправление акустических свойств“. Arch. Quarterly of Harvard Univ., март 1912; чертеж помещен также в Jour. Fr. Inst., январь 1915.

Наиболее известные архитектурные затруднения, для устранения которых приглашались эксперты, заключались в чрезмерной реверберации, повышенном местном волновом искажении, фокальных свойствах и эхо. Последние явления ведут к очень неравномерному распределению плотности энергии в помещении. Первой помощью в этом деле должно явиться применение поглощающих материалов, особенно расположение их вблизи мест с наибольшей плотностью энергии. Если эти места находятся вблизи закругленных стен, то покрытие их поглощающим материалом часто дает двойную выгоду. Если все же принятых мер недостаточно, то полезно нарушить правильное расположение отражающих поверхностей, чтобы волны раздроблялись. Для этой цели можно устраивать в помещении препятствия (например большие люстры), рационально их располагая; этими мерами многие плохие аудитории были сделаны годными для использования.

Чтобы совсем избежать стоячих волн в акустических опытах, можно применять меры, непрактичные в применении к аудитории. Наиболее радикальным средством сломить систему стоячих волн и тем обеспечить однородную плотность энергии в помещении является устройство, примененное в лаборатории У. Сэбина в Ривербэнке, Иллинойс. Оно состоит из большого стального экрана или отражающей плоскости, которая медленно и бесшумно вращается вокруг вертикальной оси в помещении ¹⁾.

§ 56. Реакция помещения на источник звука.

Остается рассмотреть реакцию помещения на работающий в нем звуковой генератор. Главную роль здесь играет сопротивление в точке возбуждения, которое, в свою очередь, зависит от расположения системы стоячих волн. В вычислениях средней плотности энергии в §§ 53 и 54 не было необходимости рассматривать фазу волнового движения, так как мощность источника была постоянна; вообще же, чтобы установить меру излучения источника, что важно в физических измерениях, следует определить сопротивление в точке возбуждения и его изменение в разных местах помещения.

Сэбин ²⁾ описывает интересный опыт, давший парадоксальный на первый взгляд результат: источником звука служила диафрагма, колебавшаяся с заданной амплитудой у основания резонирующей камеры. При определенном положении источника в комнате звук был измерен. Затем комната была сильно заглушена тем, что пол покрыли войлоком и звук был измерен вновь; оказалось, что он стал в 8 раз громче, чем до этого, при той же амплитуде колебания диафрагмы. Объяснение, очевидно, состоит в том, что введение демпфирующего материала изменило расположение системы стоячих волн и в то время как в первом опыте диафрагма находилась в точке минимального давления (или в пучности частиц скорости), во втором опыте она оказалась в точке максимального давления и могла производить большую работу при данной амплитуде.

Это объяснение можно обосновать математически, если применить уже известную нам теорию простейшей акустической системы — трубы длиной l , закрытой на удаленном конце поршнем произвольного сопротивления. Мы уже видели в § 32, что условие максимальной передачи энергии возбуждающим поршнем состоит в том, чтобы труба не вносила обусловленного ее длиной реактивного сопротивления в приведенное сопротивление и что при этом сопротивление удаленного поршня приводится к точке возбуждения.

¹⁾ Подробное описание см. Sci. Am., сентябрь 1923, стр. 154 — 155.

²⁾ W. C. Sabine. Сборник статей, приложение стр. 278.

Согласно (130) сопротивление в точке возбуждения равно:

$$Z_{00} = \rho c \frac{Z_l \cos \beta l + i \rho c \sin \beta l}{\rho c \cos \beta l + i Z_l \sin \beta l} \quad (288)$$

при $\sin \beta l = 0$, т. е. $\cos \beta l = \pm 1$ или $l = \frac{k\lambda}{2}$, где k — целое число, получаем $Z_{00} = Z_l$.

Если удаленный поршень, фактически перенесенный таким образом в точку возбуждения, представляет, например, поглощающую поверхность, то условия состоят в том, что для заданного движения у источника имеет место максимальное рассеяние у поверхности, или, если удаленный поршень представляет твердую стенку и мы хотим лишь увеличить плотность энергии в трубе, применяя источник с заданной скоростью, то получаем механизм опыта Кундта, и явления получаются согласно уравнения (135). Теперь имеем максимальную плотность энергии в трубе при том же условии, что и раньше, именно $l = \frac{k\lambda}{2}$; следовательно, плотность энергии достигает максимума, если возбуждающий поршень расположен в точке максимального давления, так как давление наибольшее у отдаленного конца.

В ряде позднейших экспериментов предполагалось, что если источник работает с заданной постоянной амплитудой, то он, несомненно, не зависимо от своего расположения, вызывает в данном пространстве вполне определенную плотность энергии.

Однако, если в обоих рассмотренных нами случаях источники были бы расположены в местах минимального, а не максимального давления, то как плотность энергии, так и поглощение на граничной поверхности стали бы много меньше; следовательно, незнание относительного положения источника ведет к ошибкам. Кроме того, известно, что при произвольном расположении источника более не зависима от места расположения отдача получается, если движущийся элемент источника приводится в колебание постоянной силой, а не колеблется с постоянной амплитудой. В этом случае амплитуда движения у источника будет ограничена отчасти внутренним сопротивлением, отчасти сопротивлением помещения в точке возбуждения, что повлечет за собой меньшие изменения излучаемой мощности от изменения положения. (Эти положения лучше всего поясняются числовым примером вроде приведенного в задаче 49). Мы, однако, никогда не можем предотвратить изменение от точки к точке сопротивления, на которое работает источник, и это следует иметь в виду при всех акустических измерениях в помещениях.

- Очевидно, невозможно расположить всех исполнителей хора или оркестра по отношению к залу так, чтобы каждый индивидуальный источник звука при всех частотах занимал правильное положение. Обычное расположение оркестра с более мощными инструментами позади как будто оправдано с точки зрения дирижера, работа которого облегчается тем, что основное ядро оркестра (струнные) расположено наиболее близко к нему. Кроме того, это расположение дает хороший перспективный вид ансамбля. С акустической стороны, однако, оснований к такому размещению нет, за исключением разве духовых инструментов. Направление труб в сторону от слушателей способствует мягкости тона, так как скрадываются резкие высшие гармоники, коими изобилуют звуки духовых инструментов.

На этом мы наше изложение заканчиваем. Ударение всюду делалось на физической стороне явлений; все рассмотренные задачи преследовали эту цель. Мы не ожидаем, что интересующийся прикладной акустикой

читатель удовлетворится теми ограниченными применениями теории, которые он нашел в этой книге, но и читатель с математическими наклонностями не будет считать исчерпывающими приведенные в каждом отдельном случае вычисления. Каждому из них мы можем лишь посоветовать применить положения классической теории звука к их излюбленным задачам и конструкциям.

ЗАДАЧИ.

41. В опыте Тейлора слой поглощающего звук материала толщиной 2 см уменьшает амплитуду стоячих волн на 50% (по сравнению с амплитудой в случае, когда материал с конца трубы удален) и слой толщиной в 4 см уменьшает амплитуду на 60%. Дальнейшее увеличение толщины войлока не оказывает заметного действия. Какой толщины слой понадобился бы для того, чтобы уменьшить интенсивность проходящей волны до 0,01 ее первоначальной величины? Для решения необходимы некоторые упрощения; заметьте, что отражающая способность войлока — величина отрицательная.

42. Из рис. 20 и 21 можно найти главные постоянные для некоторого сорта войлока для любой частоты в определенном диапазоне. Помещенный на твердую стену 2 см слой этого материала при 512 герц поглощает 50% падающей на него энергии. Чему равен коэффициент поглощения слоя при той же частоте, если он отделен от стены воздушной прослойкой толщиной 5 см?

43. Читальный зал с деревянными (сосновыми) стенами и потолком имеет длину 12 м, высоту 5 м и ширину 8 м. На каждой стороне по 4 окна площадью 2 кв. м каждое. В зале 100 стульев для посетителей, пол покрыт ковром. Чему равно время реверберации T в этом зале, если в нем находится 50 человек и окна закрыты? Как оно изменится, если будут налицо все 100 чел. и окна будут полуоткрыты, т. е. рамы подняты? Пользоваться при вычислениях следующими коэффициентами:

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОГЛОЩЕНИЯ (ПО У. СЭБИНУ).

(в квадратных метрах).

Сосна на 1 кв. м	0,06	Стул каждый	0,01
Ковер на полу на 1 кв. м.	0,20	Публика на 1 чел.	0,44
Оконное стекло на 1 кв. м	0,03		

44. Две смежных комнаты с объемами V_1 и V_2 с плотностью энергии E_1 и E_2 , коэффициентами поглощения α_1 и α_2 разделены перегородкой площадью S с коэффициентом передачи энергии k на единицу площади. Источник мощностью E работает в V_1 . Чему равны максимальные величины E_1 и E_2 при установившемся режиме? Показать, что при некоторых условиях постоянную k можно определить из соотношения

$$\ln \left(\frac{\alpha_2}{k \cdot S} \right) = -\frac{c \alpha_1}{4 V_1} (T_1 - T_2),$$

где T_1 и T_2 — соответственные времена реверберации объемов V_1 и V_2 . Чему равна интенсивность звука при выходе из перегородки, если в V_2 реверберация отсутствует? (Дэвис, Phil. Mag., 50, июль 1925, стр. 75).

45. Вывести алгебраическое выражение для времени реверберации сферического объема, покрытого поглощающим материалом, в предположении, что первоначальное распределение плотности энергии в нем соответ-

ствуется получающемуся при работе постоянного малого источника, помещенного в центре.

46. Зал имеет объем 20 000 куб. м и 3 000 мест. При всех занятых местах полный коэффициент поглощения (по У. Сэбину) равен 2×10^3 кв. м. Хорош ли зал в акустическом отношении? В этом зале в течение 0,5 сек. поддерживается звук ($1/4$ ноты) инструментом, дающим энергию в секунду, соответствующую 10^{10} порога слышимости. Чему равна средняя плотность энергии в конце ноты, выраженная через уровень порога слышимости? Каково время (T_1), потребное для спада звука до уровня порога?

47. Показать, что в эллипсоиде § 55 наибольшая плотность энергии получается в точках максимального давления, ближайших к фокусам.

48. Найти в опыте Венте (стр. 79) соотношение между максимальным и минимальным сопротивлениями трубы в точке возбуждения, а также коэффициенты отражения и поглощения слоя на конце трубы.

49. Поршень, сопротивление которого равно $a \cdot R$ (чисто активное сопротивление), возбуждает трубу единичного сечения, наполненную воздухом, причем R — сопротивление излучения воздуха. Другой конец трубы закрыт слоем поглощающего материала, имеющего сопротивление также $a \cdot R$. Длина трубы берется двоякая:

$$1) l = \frac{k\lambda}{2} \quad \text{и} \quad 2) l = \frac{(k + 1/2)\lambda}{2}.$$

Показать, что если поршень движется с одинаковой скоростью в обоих случаях, то излучения относятся как $a^2:1$.

Показать также, что если двигать поршень в обоих случаях с одинаковой силой, то излучения относятся как

$$\frac{a^2}{4} : \frac{a^4}{(a^2 + 1)^2}.$$

Примечание. Практически во всех случаях a больше единицы.

50. Чему равно сопротивление в точке возбуждения сферического объема, если в центре помещен малый сферический источник?

ПРИЛОЖЕНИЕ А.

„Вязкость вещества измеряется тангенциальной силой на единицу поверхности каждой из двух горизонтальных плоскостей неограниченных размеров, находящихся одна от другой на расстоянии, равном единице, из которых одна закреплена, а другая движется со скоростью, равной единице, причем пространство между ними заполнено вязким веществом“ (определение Максвелла).

КОЭФФИЦИЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗВУКОПРОВОДОВ.

Явления сопротивления движению жидкости в трубах круглого сечения безусловно заслуживают подробного изучения. Здесь нужно различать 2 случая, именно когда сечение трубы мало и когда оно средних размеров, причем классификация зависит не только от соотношения между постоянными жидкости и действующей шириной трубы, но также от частоты, от которой жидкость приводится в движение. Оказывается, разница между обоими случаями обуславливается величиной

$$kr = r \sqrt{-\frac{i\rho\omega}{\mu}},$$

в которой r — радиус трубы. Если $|kr|$ меньше или равно единице, то труба является „узкой“; реакция от инерции жидкости много меньше,

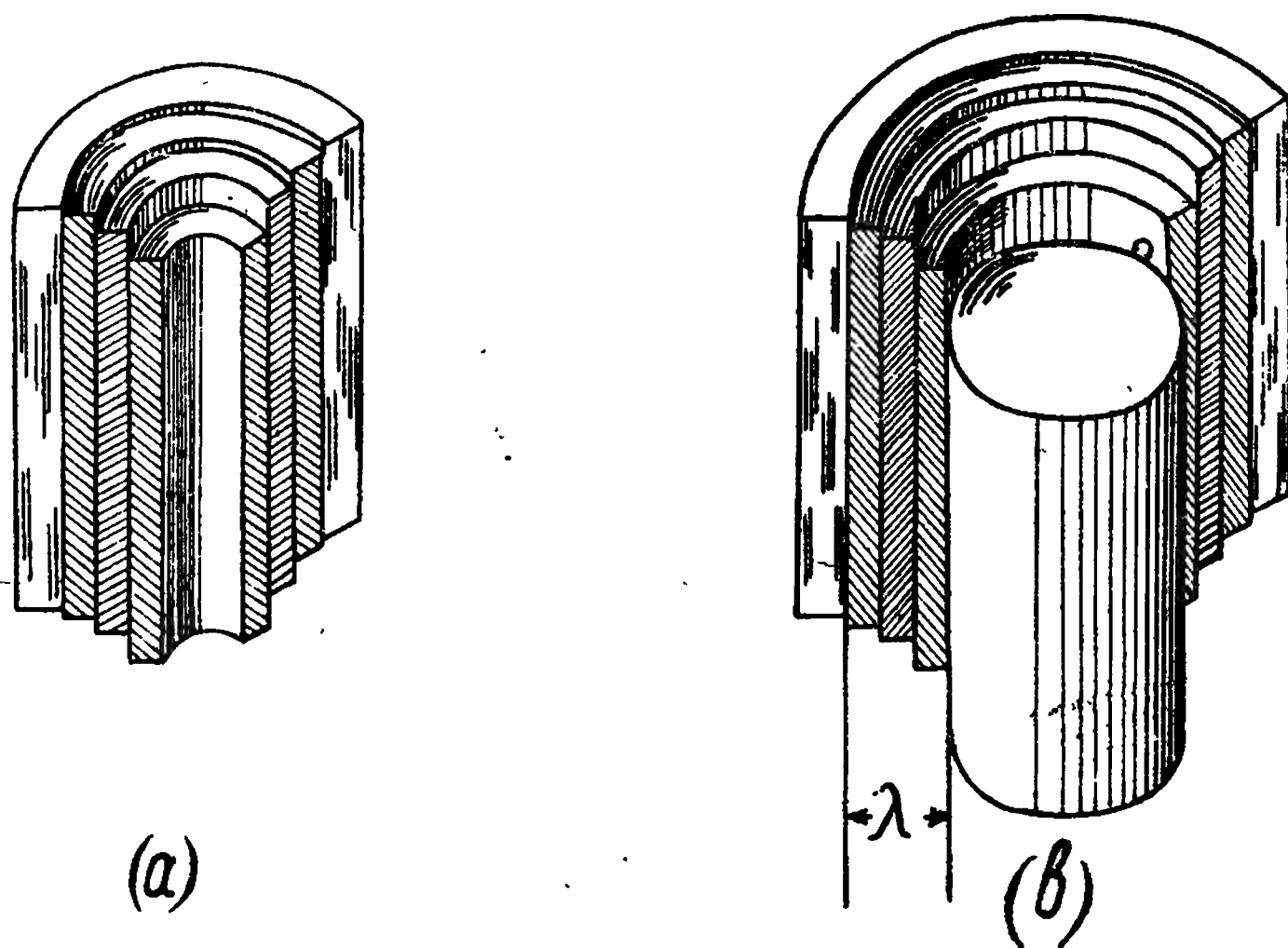


Рис. 24. Слоистое движение жидкости в узких и умеренно широких трубах.

чем сопротивление трения и отношение движущей силы к средней скорости по сечению составляет коэффициент Пуазеля ($R = 8 \frac{\mu}{r^2}$), если пренебречь составляющей инерции. В этом случае налицо слоистое течение сквозь поперечное сечение, причем скорость меняется от нуля до максимума в центре: грубо это иллюстрируется рисунком 24а. Теоретически

положение здесь аналогично колебательной системе, когда в систему добавляется как масса, так и затухание; однако, демпфирующее действие в трубе настолько сильно, что волны сжатия могут передаваться лишь с большим трудом, так что получается сходство с аperiodической системой.

В § 32 задача с распространением волны рассматривалась в предположении, что коэффициент сопротивления R_1 был мал по сравнению с $\rho\omega$. Для постоянного потока жидкости в трубах несомненно применение коэффициента Пуазеля вполне допустимо; однако, в трубках, применяемых для передачи звука, как, например, в схеме Константиновского, инерция жидкости играет настолько доминирующую роль, что закон Пуазеля становится неприменимым.

Следует заметить, что, как и в ряде других гидродинамических задач, теория и практика не дают полного совпадения и появляется необходимость в эмпирических коэффициентах. Так, например, было бы желательным установить опытным путем верхний предел частот, для которых имеет силу коэффициент Пуазеля; к сожалению, такого рода данные отсутствуют.

В большинстве задач о передаче звука в трубах фактор $|kr|$ больше единицы; иными словами, труба сравнительно „широка“ и не слишком демпфирует колебания. Положение аналогично слабо затухающей колебательной системе, причем влияние затухания состоит в уменьшении скорости распространения на малую величину второго порядка. Это уменьшение скорости было вычислено Гельмгольцем, и его решения мы будем придерживаться.

Движение в случае более широкой трубы грубо представлено на рис. 24в. Вследствие колебания жидкости вдоль оси трубы волны вязкости диффундируют радиально из жидкости, где скорость наибольшая, к стенкам трубы, где скорость равна нулю. Волны диффузии обладают специфическим свойством затухать, пройдя расстояние, равное одной длине волны. В результате действие вязкости в трубах более широких, чем двойная длина звуковой волны, ограничивается прилегающей к стенкам трубы оболочкой, толщиной, примерно, в одну длину волны. В центре трубы остается область, где тормозящий эффект практически отсутствует и где осевая скорость мало меняется в разных точках в зависимости от их расстояния от центра. Получается как бы цилиндрический столб воздуха, колеблющийся как одно целое в центре трубы и задерживаемый в своем движении реакциями, возникающими в тонком слое жидкости между его цилиндрической граничной поверхностью и внутренней стенкой трубы. Эти реакции вносят добавочные инерцию и сопротивление, что можно видеть из последующего.

Пусть бесконечная плоская стенка колеблется в собственной плоскости, соприкасаясь с жидкостью таким образом, что волны вязкости диффундируют в направлениях оси X , нормальной к колеблющейся плоскости. Сила инерции одного элемента жидкости единичной площади и толщины dx равна $\rho \ddot{\xi} dx$. Сила, испытываемая элементом вследствие срезающих усилий, равна (согласно определению μ) $-\frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \cdot dx$, причем отрицательный градиент скорости взят потому, что с возрастанием x скорость падает.

Поэтому уравнение движения будет

$$\frac{\partial \ddot{\xi}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (A)$$

и если $\dot{\xi}(x) = \dot{\xi}_0 e^{i(\omega t - k'x)}$, то имеем

$$k' = \pm \beta(1 - i); \quad \beta = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\mu}}; \quad \text{так как } \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому решение для волн, идущих в положительном направлении, будет

$$\dot{\xi}(x) = \dot{\xi}_0 e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \beta x)} \quad (\text{B})$$

и

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}}.$$

Таково расстояние, до которого еще имеют значение поперечные колебания, так как $e^{-\beta\lambda} = e^{-2\pi}$ — величина весьма малая. Реакция $R\dot{\xi}$ на возбуждающую стенку равна на единицу поверхности произведению градиентов вязкости и скорости, т. е., опуская показательный множитель:

$$R\dot{\xi}_0 = -\mu \left| \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu\beta (1 + i) \dot{\xi}_0, \quad (\text{C})$$

т. е для коэффициента сопротивления получаем

$$R = \mu\beta (1 + i).$$

Отметим, что мнимая часть этого выражения находится в фазе с ускорением возбуждающей поверхности и имеет поэтому природу реактивного инерционного сопротивления; в применении к задаче о трубе это будет, очевидно, означать уменьшение скорости распространения звуковых волн в трубе вследствие инерционного сопротивления колеблющегося столба среды в трубе, что равносильно фактическому увеличению плотности. Последнее ведет к понижению собственной частоты колебательной системы от ее нагрузки добавочной массой, каковое влияние более значительно, чем влияние добавочного затухания.

Полное усилие, действующее на единицу длины поверхности столба, движущегося в трубе газа равно $2\pi r \cdot R$; таким образом коэффициент сопротивления на единицу сечения трубы равен:

$$R_1 = \frac{2\pi r}{\pi r^2} \cdot R = \frac{2\mu\beta}{r} (1 + i). \quad (\text{D})$$

Применяя выражение (C), относящееся к плоским волнам, к поверхности цилиндра, мы вывели уравнение (D), пренебрегая кривизной цилиндрической поверхности. Это допустимо, так как толщина промежутка между колеблющимся столбом воздуха и стенками трубы мала по сравнению с радиусом трубы. (Например, $\lambda = 0,6$ мм для частоты 500 герц в воздухе). Теперь приступим к более общему изучению разобранных явлений с учетом цилиндрической формы трубы и для всего диапазона частот.

Будем поступать так же, как в § 10, только вместо круглой мембраны поставим круговое сечение (πr_0^2) среды, причем осевая движущаяся сила на единицу площади равна теперь $\Psi \cdot dx$; Ψ , очевидно, отрицательный градиент давления, параллельный оси трубы. Полная движущая сила, действующая на кольцо среды объемом $2\pi r dr \cdot dx$ равна $\Psi dx \cdot 2\pi r dr$; ей противодействует инерционное сопротивление $i\omega\rho \cdot 2\pi r dr \cdot dx$.

Противодействующая сила трения на внутренней поверхности кольца равна $-2\pi r dx \cdot \mu \frac{\partial \xi}{\partial r}$, причем, как и раньше, градиент скорости взят отрицательным ввиду убывания ξ с возрастанием r . Поэтому результирующая сила трения, действующая на кольцо, будет

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(-2\pi r dx \mu \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) dr$$

и, следовательно, уравнение движения

$$\left[i\omega\rho - \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \xi = \Psi, \quad (E)$$

в котором только ξ является функцией r . Это уравнение можно представить в виде

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] \xi = -\frac{\Psi}{\mu} \quad \left(k^2 = -\frac{i\rho\omega}{\mu} \right), \quad (E')$$

причем решение его

$$\xi = -\frac{\Psi}{\mu k^2} + A J_0(kr), \quad (F)$$

для скорости при $r=0$ (ср. уравнение (32)).

Так же, как и раньше (для мембраны), скорость на границе при $r=r_0$ должна обращаться в нуль; определяя A , имеем

$$\xi(r) = -\frac{\Psi}{\mu k^2} \left[1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kr_0)} \right]. \quad (F')$$

Интегрируя $\xi(r)$ по сечению, получаем среднюю скорость

$$\bar{\xi} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} \xi r dr = -\frac{\Psi}{\mu k^2} \left[1 - \frac{2}{k^2 r_0^2 J_0(kr_0)} \int_0^{r_0} J_0(kr) \cdot kr \cdot k dr \right],$$

т. е.

$$\bar{\xi} = -\frac{\Psi}{\mu k^2} \left[1 - \frac{2}{kr_0} \frac{J_1(kr_0)}{J_0(kr_0)} \right], \quad (G)$$

согласно метода § 12, уравнение (47). Теперь уравнение представлено в форме $\xi = \frac{\Psi}{R}$ и остается лишь рассмотреть значения R в зависимости от частоты.

Если $|kr|$ не превышает единицы, то можно положить

$$J_0(kr_0) = J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} \quad (\text{см. 25})$$

и

$$J_1(kr_0) = J_1(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} \right),$$

если ограничиваться лишь тремя членами известного разложения.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{2}{x} \frac{J_1(x)}{J_0(x)} \right] &= \left[\frac{1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - 1 + \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{192}}{1 - \frac{x^2}{4}} \right] = \\ &= -\frac{x^2}{8} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{12} \right)}{\left(1 - \frac{x^2}{4} \right)} = -\frac{x^2}{8} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{6} \right)}. \end{aligned}$$

Таким образом (G) получает вид:

$$\frac{1}{R} = \frac{\Psi r_0^2}{8\mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{k^2 r_0^2}{6}\right)} = \frac{\Psi}{R} \quad (\text{H})$$

и

$$R = \frac{8\mu}{r_0^2} + \frac{1}{3} i\omega\rho, \text{ так как } k^2 = -\frac{i\omega\rho}{\mu}. \quad (\text{I})$$

Вещественный член этого уравнения есть коэффициент Пуазеля $R_1 = \frac{8\mu}{r_0^2}$; реактивное сопротивление $\frac{1}{3} i\omega\rho$ указывает на то, что действующая масса или плотность, вследствие явлений диффузии в узкой трубе, увеличилась на $1/3$ по сравнению с реактивным сопротивлением $i\rho\omega$ неограниченной среды (235). Составляющая инерции не имеет большого значения, так как при $|kr_0| = 1$ инерционное сопротивление равно лишь $1/6$ от активного сопротивления: действие трубы по своей сущности приближается к действию апериодической системы, как мы и отметили раньше. Уравнение волнового движения относительно средней скорости напишется:

$$R\ddot{\xi} = \left(\frac{4}{3} i\rho\omega + \frac{8\mu}{r^2}\right) \dot{\xi} = \kappa' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (\text{K})$$

и, если пренебречь реактивным сопротивлением, то

$$\frac{i\omega R_1}{\rho} \xi = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}; \quad c^2 = \frac{\kappa'}{\rho}, \quad R_1 = \frac{8\mu}{r_0^2}. \quad (\text{K}')$$

Последнее имеет ту же форму, что выражение (A) и, решая тем же способом, получаем:

$$\xi = \xi_0 e^{-\beta x} e^{i(\omega t - \beta x)}, \quad (\text{B}')$$

где

$$\beta = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega R_1}{2\rho}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{4\mu}{\rho\omega r_0^2}} = \frac{\omega}{c} \frac{2}{|kr_0|}.$$

Фазовая скорость теперь равна:

$$c' = c \frac{|kr_0|}{2}, \quad (\text{L})$$

где c , как обычно, неизменная скорость звука. Бросается в глаза, что фазовая скорость весьма сильно уменьшилась, причем это является неизбежным следствием высокого демпфирования и затухания в узкой трубе.

Чтобы найти значения R в зависимости от $|kr_0|$ в пределах $1 < |kr_0| < 10$, необходимо воспользоваться соотношением

$$J_0(x\sqrt{-i}) = \text{ber } x + i \text{bei } x$$

так же, как при решении задачи о воздушном демпфировании (§ 11). Мы не будем заниматься скучным вычислением, тем более, что для практики значения R в этом диапазоне частот не представляют большого интереса. Если $r_0 = 1 \text{ см}$ и $\omega > 20$, $|kr_0| > 12$ в воздухе; таким образом, для всех акустических частот можно непосредственно применять несколько простых формул преобразования Бесселевых функций, аргументами которых являются комплексные переменные с большими абсолютными величинами.

Из (G) имеем

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{\mu k^2} \left[1 - \frac{2}{kr_0} \frac{J_1(kr_0)}{J_0(kr_0)} \right]. \quad (\text{G}')$$

Применим к G' соотношение (см. Янке и Эмде, стр. 101).

$$\frac{J_1(x\sqrt{-i})}{J_0(x\sqrt{-i})} = -i; \quad x\sqrt{-i} = r\sqrt{\frac{-i\rho\omega}{\mu}}, \quad (M)$$

которое дает хорошее приближение при $x > 10$.

Тогда имеем

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{\mu k^2} \left[1 + \frac{2i}{kr_0} \right],$$

или

$$R = -\mu k^2 \left[1 - \frac{2i}{kr_0} \right] = i\rho\omega \left[1 + \frac{2\sqrt{-i}}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{\rho\omega}} \right].$$

Это приводит к выражениям:

$$R = i\rho\omega + \frac{2\mu\beta}{r} (1 + i); \quad \beta = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\mu}}, \quad (N)$$

причем второе из них подтверждает результат, полученный ранее для широкой трубы (см. D). Инерционное сопротивление $i\rho\omega$ является обычным эффектом инерции, имеющим место во всех случаях, когда отсутствует влияние вязкости. Наибольший интерес в этом решении задачи о сопротивлении представляет добавочное реактивное сопротивление $\frac{2i\mu\beta}{r}$, обязанное совместному действию вязкости и инерции в трубе умеренной ширины; это обуславливает уменьшение скорости распространения, представляющее явление второго порядка. Уравнение волнового движения, так как $i\ddot{\xi} = \frac{\dot{\xi}}{\omega}$, будет

$$\left(\rho + \frac{2\mu\beta}{\omega r} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{2\mu\beta}{r} \frac{\partial \xi}{\partial t} = x' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (O)$$

или сокращенно:

$$\rho' \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + R_1' \frac{\partial \xi}{\partial t} = x' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (O')$$

Решая это уравнение, как и раньше (§ 32), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= Ae^{-\alpha'x} e^{i(\omega t - \beta'x)}, \\ \alpha' &= \frac{R_1'}{2\rho'c'}, \quad \beta' = \frac{\omega}{c'}, \end{aligned} \right\} \quad (P)$$

где приближенно

$$c' = \sqrt{\frac{x'}{\rho'}} = \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{\rho \left(1 + \frac{2\mu\beta}{\omega\rho r} \right)}} = c \left(1 - \frac{\mu\beta}{\omega\rho r} \right). \quad (Q)$$

Вспоминая, что $\beta = \sqrt{\frac{\rho\omega}{2\mu}}$ (уравнение B), можем суммировать результаты в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} c' &= c \left(1 - \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{2\rho\omega}} \right); \quad \rho' = \rho \left(1 + \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\mu}{2\rho\omega}} \right) = \\ \rho'c' &= \rho c \left(1 + \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{2\rho\omega}} \right); \quad R_1' \frac{2\mu\beta}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{2\rho\mu\omega}, \\ \alpha' &= \frac{R_1'}{2\rho'c'} = \frac{1}{rc} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\rho}}. \end{aligned} \right\} \quad (R)$$

Для иллюстрации величины ослабляющего эффекта согласно формуле Гельмгольца возьмем трубу радиусом 5 мм при $\omega = 6000$ в воздухе. Изменение скорости равно $c - c' = 0,007 c$; $\alpha' = 1,3 \times 10^{-3}$. Поэтому, очевидно, что во многих случаях эти влияния настолько слабы, что мы вправе ими пренебречь.

Приведенные подсчеты не учитывают потери от отдачи тепла стенкам трубы (238); учесть последнее более затруднительно. Теплопроводность газа есть коэффициент того же порядка, как и кинематическая вязкость, так что потери на теплопроводность эквивалентны в общем случае значительному возрастанию кинематической вязкости. В частном случае в узкой металлической трубе, если бы отсутствовала вязкость, изменения объема газа происходили бы изотермически так, как было изложено в § 11 при вычислении изменений давления в тонком воздушном слое между двумя металлическими поверхностями. В таком случае скорость распространения определилась бы формулой Ньютона $c^2 = \frac{p_0}{\rho}$. Мы, однако, уже видели [уравнение (L)], что одно лишь влияние вязкости очень сильно понижает фазовую скорость. В этом случае действие вязкости доминирует.

Придерживаясь положений Кирхгофа, обработанных Рэлеем (Rayleigh, II, § 348), в которых учитывается эффект теплопроводности, можно к коэффициенту $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ прибавить еще коэффициент (напр. σ), представляющий „диффузивность“ или „температурную проводимость“ газа. Если положить $(\gamma')^2 = \nu + \sigma$, то для скорости звука в трубе средней величины получим

$$c' = c \left(1 - \frac{\gamma'}{2r\sqrt{\pi f}} \right). \quad (R')$$

Для воздуха при нормальных температуре и давлении имели бы $\nu = 0,13$, $\sigma = 0,17$, откуда $\gamma' = 0,54$ в единицах CGS.

Наконец, рассмотрим некоторые экспериментальные проверки формулы Гельмгольца-Кирхгофа; хороший обзор старых работ имеется у Бэртона в его „Textbook of Sound“. Вслед за опытом Кундта (который первый заметил уменьшение скорости в трубе) Шнебели (Schneebeili) (1869) и Зеебек (1870) экспериментировали с трубами разных диаметров, применяя звуковые волны несколько ограниченного диапазона частот. Оказалось, что скорость менялась пропорционально $\frac{1}{r}$, в согласии с формулой, но с частотой она менялась пропорционально $\frac{1}{\omega^{\frac{2}{3}}}$, а не $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$.

Кайзер сумел привести свои данные в согласие с формулой при условии, что μ — величина большая; предположение не без оснований, так как μ растет от потерь как на вязкость, так и на теплопроводность. Блэкли (Blaikley) (1884), производивший весьма тщательно и на одной лишь частоте (256) опыты с гладкими латунными трубами диаметром от одного до девяти сантиметров, пришел к выводу, что формула Гельмгольца справедлива в том смысле, что эффект действительно обратно пропорционален диаметру трубы; полученные данные говорили также в пользу закона обратной пропорциональности $\sqrt{\omega}$. Однако, в 1903 году Мюллер установил, что формула Гельмгольца неверна и что скорость звука в трубе, кроме всего прочего, зависит от материала трубы (это, несомненно, справедливо, как мы и указывали в § 32; однако, при толстостенных трубах влияние должно быть незначительным (240)). Стивенс (E. H. Stevens, Ann. d. Phys., 7, 1902, стр. 285), интересовавшийся скоростью звука как таковой, получил из своих опытов значение для

поправочного коэффициента γ' в воздухе несколько больше, чем должно быть теоретически. Важно, однако, то, что для труб диаметром от 2 до 4 см γ' оказалось постоянно и, следовательно, соответствовало формуле Гельмгольца-Кирхгофа.

Грюнейзен и Меркель *Ann. d. Phys.*, 66, 1921, 344,) также, изучая скорость звука, получили для γ' в воздухе значение 0,49 CGS вместо теоретического 0,54 CGS.

Из всех этих опытов можно сделать тот вывод, что результаты противоречивы и следует произвести ряд измерений над передачей звуковых волн в широком диапазоне частот¹⁾, пользуясь хорошими гладкими трубами.

ПРИЛОЖЕНИЕ В.

НОВЕЙШИЕ ОТКРЫТИЯ В ОБЛАСТИ ПРИКЛАДНОЙ АКУСТИКИ.

1. Пьезо-электрические резонаторы.

Различие между старой и новой техникой можно проследить на типичном опыте; для этого возьмем опыт Кундта, теория которого изложена в § 32. Сам опыт был описан в „Учебнике акустики“ Бэртона (Лондон, 1914, стр. 530). Интересно отметить, что в 1868 г. Кундт при помощи трубы и стержня, приводимого в движение рукой, измерил скорость звука в разных жидкостях и определил влияние уменьшения трубы на скорость; последнее, как известно, состоит (приложение А) в уменьшении скорости, более или менее соответствующем формуле Гельмгольца. В современных опытах резонирующий металлический стержень снабжается в местах максимального давления пьезо-электрическими кристаллами кварца, и получившаяся, таким образом, электромеханическая система заключается в качестве конденсатора в электрическую колебательную цепь. Посредством этого прибора Кэди (*W. G. Cadu*, *Phys. Rev.*, 21, 1923, стр. 971; *ibid.*, 23, 1924, стр. 558), пользуясь приводимыми в колебание электрическим путем стержнями, собственные частоты которых были точно известны, разработал удобный, и точный способ определения скорости звука в трубах.

Теория продольных колебаний вязкого стержня дана Кэди в *Phys. Rev.*, 19, 1922, стр. 1, а теория пьезо-электрического кристалла—в *Proc. I. R. E.*, 10, 1922, стр. 83; эквивалентная электрическая цепь описана Ван-Дейком в *Phys. Rev.*, 25, 1925, стр. 895. Имеется еще статья Лауэ (*M. v. Laue* *Zeit. f. Phys.* 34, 1925, стр. 347) о пьезо-электрических колебаниях в кварцевых стержнях. Пьезо-электрический резонатор необычайно устойчив и постоянен и был введен в разных формах Кэди в качестве стандарта частот, особенно радиочастот; см. *Proc. I. R. E.*, 12, 1924, стр. 805; также *Jour. Opt. Soc. Am.*, 10, 1925, стр. 475; также Ф. Е. Нанкарроу *P. O. E. E. I.*, 18, 1925, стр. 168; также Пирс (*G. W. Pierce*, *Proc. Am. Acad.* 59, № 4, 1923, стр. 81).

¹⁾ Относительно подлежащего перекрытию диапазона частот мы сошлемся на опыты Симона и Иогансена по передаче по длинной резиновой трубе воздушных волн весьма низкой частоты, описанные в *Phil. Mag.*, 50, 1925, стр. 553. Результаты показывают, что затухание в трубе больше, чем определенное теоретически; это может быть следствием пористости стенки (см. § 32). Волновая скорость при взятых частотах (от 30 до 60 пер. в минуту) оказалась несколько ниже, чем ньютоновская (т. е. менее 278 м в сек.). Наблюдения производились с трубой диаметром 9,5 мм; при уменьшении диаметра авторы получили весьма существенное уменьшение волновой скорости.

Применение управляемых электрических камертонов для стандартизации частоты описано Хортоном, Рикером и Мэррисоном, Trans. A. I. E. E., 42, 1923, стр. 730.

Пьезо-электрические осцилляторы применялись Пирсом (Pierce, Proc. Am., Acad., 60, № 5, 1925, стр. 271) для точных измерений скорости звука в диапазоне высоких частот (4×10^4 до 10^6 герц) в воздухе и углекислоте.

Способ основан на реакции системы стоячих волн, возникшей между возбуждающим кристаллом и близлежащей отражающей стенкой. (Действие пьезо-электрической системы аналогично другим электромеханическим приборам, в которых скорость движущихся частей переводится в электрическое „сопротивление движения“, которое, складываясь с собственным электрическим сопротивлением приборов, определяет полное электрическое сопротивление между зажимами, поэтому можно назвать прибор Пирса акустическим интерферометром).

Между прочим Пирсом установлено несомненное изменение скорости звука в обоих газах с частотой и сильное поглощение звука в углекислотах при высоких частотах. Производились также измерения на низкой частоте, основанные на резонансе в 4-см трубе, причем источником служил простой телефон. Статья содержит также много указаний на новейшие опыты по определению скорости звука в воздухе.

2. Телефоны.

Этот аппарат, изобретенный в 1875 году Александром Грэхэмом Беллем, является не только самым старым, но и стал самым необходимым прибором лаборатории. В § 7 мы уже ссылались на работу Кеннелли о колебании мембраны и другие вопросы, разобранные в его „Electrical Vibration Instruments“.

Хорошую вводную статью о телефоне написал Кинг (L. V. King, Journ. Fr. Inst., 187, 1919, стр. 611). Наиболее полное исследование принадлежит Вегелю (J. A. I. E. E., 40, 1921, стр. 791). Ссылка на две статьи Ханеманна и Хехта сделана в выноске § 7. Продолжение их работы имеется в двух статьях в Ann. d. Phys., 60, 1919, стр. 454; 63, 1920, стр. 57 и 64, 1921, стр. 671.

О звуковом излучении и звуковых генераторах¹⁾ теми же авторами написаны две статьи, переведенные в Engineering 106, 1918, стр. 756 и 107, 1919, стр. 224. Недавно появившаяся статья Mallet and Dutton, Jour. I. E. E. 63, 1925, стр. 502 описывает некоторые интересные опыты с приемниками.

Стандартные телефон и фонометр Вебстера, применяемый для измерения интенсивности звука, описаны в Proc. Nat. Acad. Sci., 5, 1919, стр. 173 и 275.

Лучшей статьей о поведении мембраны в звуковом поле является статья Гольдхаммера (Ann. d. Phys. 33, 1910, стр. 192), статья Мейера (E. Meyer. Ann. d. Phys. 71, 1923, стр. 567) трактует о силе воздействия звуковых волн на резонирующие мембраны. Наконец, колебания диска, зажатого в центре, исследованы Саутвеллом (R. V. Southwell, Proc. Roy. Soc., 1922, стр. 133).

¹⁾ См. также ст. Шоттки (Zeit. f. Phys. 36, 1926 стр. 689) о законе низкочастотного приема в акустике. Он придерживается принципа взаимности, данного Гельмгольцем. Рэлеи применил этот принцип к коническому рупору (II, стр. 146) и к истолкованию одного из опытов Тинделя (см. „Применение принципа взаимности в акустике“ Proc. Roy. Soc., 25, 1876, стр. 118 или Scientific Papers, I, стр. 305). Правда, применимость его ограничена; в опыте Тинделя он оказался неприменимым. Шоттки использовал принцип для сравнения приемных и излучающих свойств „Band Sprecher'a“—прибора, о котором будет упомянуто в следующем параграфе.

3. Громкоговорители.

Существует много рупорных моделей. Модель „Вестерн-Электрик“ описана в *Electrician*, март 1920 и в ряде бюллетеней фирмы. Громкоговоритель Маркони описан в *Wireless World*, XV, 1924.

Было предложено много безрупорных конструкций; большинство имеет легкую мембрану, связанную с электромагнитной движущей системой. В этом отношении типична модель 540 AW Вестерн-Электрик (см. *Sci. Am.*, декабрь 1924); QST 8 декабря 1924; Бюллетень № Т — 750 Вестерн Электрик К°.

В конструкции Hewlett'a большая диафрагма из проводящего материала, помещенная в сильное магнитное поле, приводится в движение индуцированными вихревыми токами; система описана в *Jour. Opt. Soc.* 6, 1922, стр. 1059; теория ее приведена в *Radio Broadcast*, 7, август 1925, стр. 508. Громкоговоритель Гомон (*G a i m o n t*), в котором катушка прикреплена к диафрагме, и последняя помещена в сильное магнитное поле, описана в *Bull. Soc. Franc. des Electriciens*, 4, 1924, стр. 157, также в *Génie Civil* 84, 1924, стр. 526. Немецкий „*Bandsprecher*“ описан Герляхом (*Phys. Zeitschr.* 25, 1924, *Zeit. f. Tech. Phys.*, 5, 1924) и Шоттки (*Zeit. f. Tech. Phys.*, 5, 1925 или *Phys. Zeit.*, 25, 1924), а также в *Electr. Nachr. Tech.*, 2 1925 и в Известиях концерна Симменса, изготовляющего эти приборы. Интересны образцы френофона Брауна (*S. G. Brown*, J. I. E. E., 62, 1924) и прибор Джонсон-Рабека (*J. I. E. E.*, 61, 1923, также *Zeit. f. Tech. Phys.* 2, 1921 и *Jahrb. d. Draht. Teleg.*, 19, 1922). Общие сведения о громкоговорителях содержатся в статье Райса и Келлога (*J. A. I. E. E.*, 44, 1925), озаглавленной „Заметки о конструкции нового типа безрупорного громкоговорителя“. Интересные мысли о разных фазах решения задачи о говорителях имеются в статье (*J. I. E. E.*, 62, 1924 стр. 265), написанной несколькими членами Института инженеров-электриков и Лондонского физического общества. Отличный материал по общей теории громкоговорителей содержит статья Риггера *Missensch. Veröffent. aus d. Siemens Konzern*, III, № 2, 1924, стр. 67; новый способ испытания этих приборов дает статья Тренделенбурга, *ibid.*, IV, № 2, 1925 стр. 200. Недавняя статья С. Р. Наппа (*Proc. I. R. E.*, 13, 1925 стр. 437) описывает уравновешенный движущий механизм громкоговорителя.

Громкоговорители как рупорного, так и безрупорного типа быстро развиваются, и возможности их далеко не исчерпаны (247).

4. Термофон.

Этот прибор, мало эффективный по сравнению с телефоном, имеет преимущество — отсутствие резонанса. Теория его разработана Арнольдом и Крэндаллом (*Phys. Rev.*, X, 1917, p. 22), а также в позднейшей статье Венте, *ibid.*, XIX, 1922, стр. 333).

5. Резонаторы; микрофоны с накаливаемой проволокой.

Интересные работы о резонаторах опубликованы Ханеманом и Хехтом (*Phys. Zeit.* 21, 1920, стр. 187; *ibid.*, 22, 1921, стр. 353), а также Джонсом (*A. T. Jones. Phys. Rev.*, 25, 1925).

В связи с этим читателя может заинтересовать действие микрофона Теккера, состоящего из накаливаемой проволоки, помещенной у устья резонатора. Он описан в *Phil. Trans. Roy. Soc. Vol.*, A 221, 1921, стр. 38, и *Proc. Roy. Soc.*, A 101, 1922, стр. 391; *Phil. Mag.*, 48, 1924, стр. 769; имеется хорошая статья Paris об усилении акустических колебаний резонаторами

в Science Progress, XX, № 77, 1925. Резонатор Barus'a¹⁾ (Proc. Nat. Acad. Sci., 8, 1922, стр. 163) был обследован Сэбином в Phys. Rev., 23, 1924, стр. 116.

Сам микрофон с накаливаемой проволокой описан Хиппелем (A. V. Hippel, Ann. d. Phys., 76, № 6, 1925): термоприбор для измерения интенсивности звука описан W. Spaeth, Zeit. f. Tech. Phys., 6, 1925.

6. Диск Рэля.

Mallet и Dutton (J. I. E. E., 63, 1925) использовали диск Рэля для измерения звуковой отдачи телефона; таким образом, изобретение Рэля, сделанное в 1882 г., Phil. Mag., XIV, 1882 и др.) и сейчас находит применение. Его преимуществом является постоянное отклонение, пропорциональное квадрату скорости частиц в неискаженном поле; другим чисто акустическим прибором является только еще радиометр, описанный в § 48. Диск не должен быть слишком большим, чтобы его размеры не были одного порядка с длиной звуковой волны; на получающиеся при этом ненормальности указывает Скиннер (C. H. Skinner) в Phys. Rev., 27, 1926, стр. 346.

7. Фонодейк.

Этим прибором пользовался Миллер (D. C. Miller) в своих исследованиях речи и музыки; он описан подробно в его книге „Наука о музыкальных звуках“, на которую мы уже ссылались в § 1. Конструкции и регулировке прибора посвящена, кроме того, недавняя статья Андерсона (S. H. Anderson, J. Opt. Soc. Am., II, 1925, стр. 31).

8. Конденсаторный микрофон.

Акустическая лаборатория должна применять обычные микрофоны с осторожностью, так как чувствительностью их трудно управлять. Для точных работ над детектированием звуков в широком диапазоне более пригодны электромагнитные и электростатические приборы. Представителем первого класса является магнетофон Маркони, описанный Раундом в Wireless World, XV, Nov., 26, 1924. Представитель второго класса — конденсаторный микрофон Венте; новейшие его образцы описаны им в Phys. Rev., XIX, 1922. Сведения о последних моделях можно получить от компании Вестерн Электрик.

Конденсаторный микрофон Риггера (описанный Тренделенбургом, Wiss. Veröff. d. Siemenskonzern, III, № 2, 1924) резко отличается от прибора Венте как по конструкции, так и по менее прямому пути использования. Его механические характеристики более сложны, и применяется он в цепях высокой частоты, так что приходящие волны разговорной частоты модулируют высокочастотные колебания; более подробно свойства прибора описаны в вышеуказанной статье.

Конденсаторный микрофон Венте использовался во многих опытах персоналом Телефонных Лабораторий Белл в тех случаях, когда требовалась неискаженная передача речи. В такого рода опытах нужны также не вносящие искажений усилители и осциллографы для записи. Подвижная часть осциллографа, общая конструкция которого описана Кеннелли („Электрические вибрационные приборы“, глава XV) должна быть сильно задемпфирована и хорошо отрегулирована. Описание усилителя, с которым работали Крэндалл и Сачиа, записывая гласные и согласные звуки, поме-

¹⁾ Pin-hole — резонатор.

щено в одной из статей Крэндалла, о чем мы упомянем ниже. Наиболее важные требования, предъявляемые к усилителям, работающим с точными приборами — это, по возможности, постоянная отдача на всем рабочем диапазоне частот и отсутствие искажений при перегрузке.

9. Речь и слух.

Голос и ухо в широком смысле — главные акустические приборы; и хотя многие акустические опыты могут производиться независимо от речи и слуха, никто из работающих в области акустики не пройдет мимо этих свойств.

Слух тщательно изучался сотрудниками Телефонных Лабораторий Белл; физическим измерениям посвящена статья Флетчера (в *Bell. Syst. Tech. Jour.*, II, октябрь 1923, а также в *Jour. Fr. Inst.*, 196, 1923, стр. 289), содержащая также весьма полную библиографию предмета. Последнее письмо Вегеля. (R. Wegel, *Nature*, 116, 1925, стр. 393) дает хороший обзор современного состояния резонансной теории слуха¹). Собрание лучших данных о постоянных речи и слуха помещено в *Bell. Syst. Tech. Jour.*, IV, июнь, 1925, стр. 375.

В этой статье имеются ссылки на данные Флетчера и Штейнберга, Флетчера и Вегеля, Вегеля и Лэна и ряда других. Аудиометр — прибор для измерения чувствительности уха — описан Флетчером в *Trans. Coll. of Physicians of Phila*, 45, серия 3, 1923, стр. 489; также в нескольких бюллетенях Вестерн Электрик К^о Аудиометрические методы и их применения описаны Фаулером и Вегелем в *Trans. Am. Laryng. Rhinol. and Otol. Soc.* 1922, стр. 98.

Опыты Кранца в лаборатории в Ревербенке над чувствительностью уха (*Phys. Rev.*, 21, 1923, стр. 573 и *ibid.* 1923, стр. 66) были затем продолжены. Относительная чувствительность при разных уровнях громкости изучалась Макензи (*Phys. Rev.*, 20, 1922, стр. 331; V. O. Knudsen поместил статью о чувствительности уха в *Phys. Rev.*, 21, 1923, стр. 84 и статью о действии тонов и помех при приеме речи ухом в *Phys. Rev.*, 26, 1925, стр. 133. Связь между громкостью звука и физическим воздействием исследована Штейнбергом, *Phys. Rev.*, 26, 1925, стр. 507.

Общий обзор главнейших германских работ по теории слуха дан Вецманом *Phys. Zeit.*, XXVI, 1925, стр. 740. Он же написал книгу „Резонансная теория слуха“ (Брауншвейг, 1912).

Можно утверждать, что при пользовании ухом для обнаружения звука приходится для достижения заданной точности делать гораздо больше наблюдений, чем при пользовании механическим или электрическим прибором. Ухо лучше всего для сравнения двух звуков одинаковой формы волны и равной интенсивности; при этом получается точность до 5⁰/₆ при одном наблюдении, что соответствует точности глаза при фотометрических измерениях.

Наиболее оригинальной работой последних лет над звуками речи была работа по их синтезу из колебаний электрических и механических резонаторов. (Большинство гласных можно имитировать, соответственно возбуждая систему двойного резонатора. В такой системе внешнее отверстие соответствует рту, полость позади его — зеву и внутренняя полость — глотке. Связь между обеими полостями можно менять, меняя размеры отверстия между ними, и так как объемы самих полостей могут меняться,

¹) Интересную и хорошо написанную „реставрацию резонансной теории слуха“ представляет монография Георга Вилькинсона и Альберта Грея „Механизм ушной раковины“ (Лондон, 1924).

то можно подобрать режим, достаточно точно дающий эффект двойного резонанса).

Аналогичным электрическим методом пользовался С т ю а р т (J. Q. Stewart, Nature, 110, сент. 2, 1922, стр. 311); механическим для гласных звуков — сэр Р и ч а р д П э д ж е т (Proc. Roy. Soc., A 102, 1923, стр. 752) и для согласных он же (ibid., A106, 1924, стр. 150); см. также Nature, III, Jan, 6, 1923; Proc. Lond. Phys. Soc. 36, 1924; J. I. E. E., 62, 1924, стр. 963. В связи с этим интересна искусственная гортань Ф л е т ч е р а и Л э н а. Она описана в Western Electric News., Jan. 1925; Philadelphia Record. Jan. 18, 1925 и других местах.

Структура гласных и частоты некоторых согласных исследованы Ш т у м п ф о м (C. Stumpf, Ber. d. Preuss. Akad. Berlin, 1918; также ibid., 1921; позднейшая статья Штумпфа появилась в Beitr. Z. Anat. Physiol., Pathol. des Ohres etc., 17, 1921; см. также ibid., стр. 143 и 182. Другое германское исследование, Тренделенбурга, помещено в Wissensch. Veröffentl. des Siemens-Konzern, III, Heft, 2, 1924, стр. 43 и ibid. IV, Heft. I, 1925, стр. 1; см. также E. T. Z., 46, 1925, стр. 91; первая из этих статей содержит библиографию предыдущих немецких работ. Недавно опубликованная статья Риггера и Тренделенбурга, Zeit. f. Tech. Phys. 7, 1926, стр. 187 описывает дальнейшее исследование в области речи применительно к проблеме громкоговорителя.

Мы уже указывали на работы над речью в лаборатории Белл. Общая проблема высококачественного воспроизведения речи исследована Мартином и Флетчером в Trans. A. I. E. E. 43, 1924, стр. 384.

Работа Крэндалла и Сачиа о речи была продолжена: статьи Сачиа „Мощность речи“, и Крэндалла „Звуки речи“ появились в Bell. Syst. Tech. Jour., IV, окт. 1925. Результатом всех исследований речи являются характеристические частоты и распределение энергии по времени и по частоте отдельных звуков (например, полугласные звуки имеют частотные спектры, наводящие на мысль о четырех степенях свободы, причем играют роль носоглотка и носовые полости).

10. Приборы для анализа звука.

Математические и графические методы анализа относятся к сфере математических лабораторий; здесь мы упомянем о приборах, в которых используются настроенные цепи или другие физические принципы. Представителями чисто физических приборов для анализа сложных форм волны являются приборы Вегеля и Мура для электрического анализа (Bell. Syst. Tech. Jour., III, 1924) и фотомеханический метод С. Сачиа (J. Opt. Soc. of Am. 9, 1924, стр. 487). Вышеупомянутый микрофон с нагретой проволокой применялся Феджем (A. Fage, Proc. Roy. Soc. A107, 1925) для анализа вибраций воздушных винтов.

11. Приборы подводной сигнализации; улавливание звука под водой, определение глубины.

После войны сильно возрос интерес к звукоулавливающим приборам вообще; много было сделано в области подводной сигнализации, акустического определения глубины, обнаружения подводных лодок и самолетов, звукометрии и геофонов.

Имеется два основных источника для черпания сведений о подводной сигнализации. Первый представляет собой ряд статей, поименованных в разделе II „Некоторых проблем акустики“ (Bull. Nat. Res. Council, loc. cit.); более современные работы описаны в написанной Драйсделем главе (IX)

коллективного труда: „Механические свойства жидкостей“ и в его одиннадцатой лекции J. I. E. E., 58, 1920, стр. 572. Вторым источником — это „Unterwasserschalltechnik“ Айгнера (F. Aigner), Берлин, 1922.

Теория приема звука в воде разработана Вильсоном (Phys. Rev., XV, 1920, стр. 178). Реакция среды (воды) на эластичные пластины является темой статьи Лемба (H. Lamb. Proc. Roy. Soc., A 98, стр. 205). Механика мембран, погруженных в жидкость, изучалась Пауэллом и Робертсом в Proc. Lond. Phys. Soc., 35, 1923, стр. 170; см. также Пауэль (J. H. Powell), *ibid.*, 37, 1925, стр. 84. Эти авторы подтверждают теорию Лемба. Мембраны с плавной настройкой описаны Кингом в Proc. Roy. Soc., A 99, 1921, стр. 163. Статья Барлоу и Кине (Barlou and Keene) Phil. Trans., A 222, 1922, стр. 131) посвящена анализу звуков в воде. Две статьи Хехта (H. Hecht) о подводной акустике помещены в Zeit. f. Tech., 2, 1921, стр. 265 и 337. Статья Лихте (H. Lichte. Phys. Zeit. 20, 1919, стр. 385) разбирает влияние градиента температуры в воде на дальность сигнализации. О взрывах под водой писал Лемб (Phil. Mag., 45, 1923) и Рамзауэр (Ann. d. Phys., 72, 1923).

Сообщения Хэйса (H. C. Hayes) подводят итог многочисленным американским работам в области подводного звукоулавливания. Имеются две его главы в томе LIX, Proc. Am. Phil. Soc., 1920, № 1, стр. 1 и № 5, стр. 371. Первая из этих глав содержит между прочим описание компенсатора и ряда приборов к нему, о котором докладывал Американскому физическому обществу М. Мазон; см. также патенты: британский № 146192, дек. 28 1921 и патент САСШ № 1422 876, июль 18, 1922. Электрический компенсатор Пирса описан в § 287 его книги „Электрические колебания и волны“; см. также британский патент № 146163, октябрь 25, 1921 и Proc. Am. Acad. 57, № 8, май 1922. Прибор Searphone Вестерн-Электрик защищен патентом САСШ № 1581334. Он является протитипом гидрофона с резиновой мембраной и с инерционным микрофоном.

Вторая статья Хэйса описывает гидрофон как вспомогательное средство для навигации. Его заметка в Jour. Fr. Inst., 197, 1924 касается измерений глубины океана акустическими методами; см. также его статью в Proc. Am. Phil. Soc., LXIII, 1924, стр. 134 и ряд статей в Marine Review 51, 1921, стр. 404, 466, 493. Работа Кинга о сигнализации помещена в Nature, 114, 1924, стр. 122; см. также *ibid.*, 113, 1924, стр. 463; исследование Хэйса описано также в Hydrographic Review (Монако), 2 № 1, 1924 стр. 93. Другие французские работы описаны Коллэном (F. Collin) в Génie Civil, 86, 1925, стр. 38 и 64. Метод использования эхо, разработанный Бэмом в Киле, описан в Bull. Technique du Bureau Veritas, 6, 1924, стр. 161.

Методы, применяемые компанией Подводной сигнализации (Бостон), описаны Хэйсом в Engineer, 129, 1920, стр. 491 и в литературе, издаваемой этой компанией.

В британской практике центральной работой в области звукоулавливания является работа сэра Вильяма Брэгга и его сотрудников (см. Engineering, 107, 1919, стр. 776 или Nature, 103, 1919, стр. 467). Вуд и Юнг поместили две статьи о направленности звукоулавливания под водой в Proc. Roy. Soc., A 100, 1921, стр. 252 и 261. Другие интересные статьи принадлежат Макленнану (J. C. McLennan Trans. North East Coast Inst. of Engrs. and Shipbuilders, 35, 1919, стр. 386) и Дю-Буа-Раймону, Zeit für Tech., Phys., 2, 1921, стр. 234; см. также London, Times Engineering Supplement, июль, 1919 стр. 220 и Nature, 104, 1919, стр. 28 (с введением сэра Чарльза Парсона). Главные работы французов в области звукоулавливания описаны Троллером, La Nature, 49, 1921, стр. 4; см. также le Génie Civil, 79, 1921, стр. 375, 393 и 417; также Марселэн, Bulletin de Recherches et Inventions, №№ 10, 11, 12, 1920, стр. 513, 577 и 641; Брилье

(Н. Brillié, *Le Génie Civil*, 80, 1922, стр. 378, 397 и 427). О более ранних статьях (1919) Брилье мы уже упомянули в § 31.

Работы лабораторий Signal Gesellschaft в Киле описаны в „Submarine Acoustic Signalling Apparatus“ Ханеманном, *Proc. Inst. Rad. Eng.*, 11, 1923, стр. 9. Хорошее описание большого звукового генератора дано Дю-Буа-Реймоном, Ханеманном и Хехтом в *Zeit. f. Tech. Phys.*, II, 1921, стр. 1 и 33; см. также Гердин (H. Gerdien, *Phys. Zeit.*, 22, 1921, стр. 679). Ханеманн и Лихте описали в *Die Naturwissenschaften* 8, 1920, стр. 871 развитие подводных улавливателей в Германии во время войны. Людвиг в *Phys. Zeit.*, 21, 1920, стр. 305 поместил исследование применения собственных колебаний микрофонов для подводного приема. Баркаузен и Лихте (*Ann. d. Phys.*, 62, 1920, стр. 485) приводят результаты исследования условий передачи под водой; Айгнер поместил в *Zeit. f. Phys.*, I, 1920 г., стр. 161 статью о наиболее экономичной рабочей частоте; наконец, обзор конструкции сигнальных аппаратов дан Вольфом (W. Wolf, *Zeitschr. f. Fernmeldetechnik*, 2, 1921, стр. 81).

Хорошая библиография о разных способах подводной сигнализации опубликована в *The Radio Review*, II, Sept. 1921, стр. 487. Там можно найти указания об изобретениях военного времени Ланжевена, Пупина, Хэйса, Вильямса, Фессендена, Мазона, Пирса и сотрудников Signaegesellschaft в Киле, о некоторых из них мы уже упоминали.

Другая хорошая библиография содержится в обстоятельной статье Тенани (M. Tenani) в *Rivista Marittima*, 57, 1924, стр. 319.

12. Радио-акустическая сигнализация.

Для определения местоположения на море была применена комбинация радио и акустической сигнализации. В одном типовом устройстве этого рода акустические сигналы представляют собой синусоидальные колебания; применение этой схемы можно видеть в британском патенте № 146125, 1920 г., принадлежащем Вильямсу из компании Подводной сигнализации. Можно было бы упомянуть о ряде других; недавнее бурное развитие этой отрасли связано с успехами радиотехники. В другом устройстве для производства акустического сигнала служит бомба, которая разработана совместно с бюро стандартов САСШ и U. S. Coast and Geodetic Survey и описана Винтерсом, в *Radio*, 6, июль 1924, стр. 10. См. также специальный оттиск U. S. Coast and Geodetic Survey, № 107, 1924: „Радиоакустический метод определения места нахождения“ Гека, Экхардта и Кейзера.

13. Звукометрические приборы.

Мы уже упомянули о микрофоне Тэкера, который применялся в качестве детектора для звукометрии, т. е. для определения направления и расстояния до стреляющих орудий. Другие ссылки на британскую практику можно найти в уже цитированной лекции Драйсделя и в обращении Парсона в „Nature“, 104, 1919, стр. 278. Достижения САСШ описаны Траубриджем (Col. A. Trowbridge *Jour. Fr. Inst.*, 189, 1920, стр. 133; работа военных инженеров в сотрудничестве с Вестерн Электрик К° над приборами и методами описана Стефенсоном в *U. S. Engineer School Occasional Papers*, 63, 1920; см. также Кресс (J. B. Cress) *Military Engr.*, 12, 1920, стр. 275. Последняя работа базируется на британской практике (системе Булля-Тэкера). Некоторые теоретические проблемы разобраны Эсклангоном (E. Eschlangon), *Rev. Scientifique*, 59, 1921, стр. 164, а также Ходжкинсом (H. W. Hodgkins), *Jour. U. S. Artillery*, 52, 1920, стр. 41.

О подводной звукомерии имеются статьи: Ф. Смита (E. Smith) в Engineer, 138, 1924, стр. 534; Аллена (H. C. Allen), Coast Artillery Jour., 59, 1923, стр. 35, см. также J. U. S. Artillery, 54, 1921, стр. 69 и статью Вебба (R. B. Webb) в Coast Artillery, Jour., 59, 1923, стр. 17.

14. Определение направлений; определение места нахождения самолетов.

В ряде статей, о которых мы упоминали, говоря о звукомерии и подводной сигнализации, по необходимости затронут вопрос бинаурального слушания; этот вопрос имеет исключительное значение для определения направления на источник звука в воздухе. В этой области выдающимися являются статьи Хартлея (Phys. Rev., XIII, 1919, стр. 373), Стюарта (Phys. Rev., XV, 1920, стр. 425 и 432) и Хартлея и Фрея (Phys. Rev., XVIII, 1921, стр. 431); см. также библиографию Флетчера в Jour. Fr. Inst. Sept. 1923.

Интересна статья Мейера о „Стереоакустическом слухе“ (E. T. Z.), 46, 1925, стр. 805, а также Лэна (C. E. Lane), Phys. Rev. 26, 1925, стр. 401). Влияние неравномерностей в воздухе на передачу звука рассмотрено Стюартом (Phys. Rev., XIV, 1919, стр. 376); в этом же томе (стр. 166) описана его работа по определению места нахождения самолетов. На эту же тему имеется статья Вецмана в Zeit. f. Tech. Phys., 2, 1921, стр. 191. Там же (в 4 томе, 1923, стр. 99) статья Любке описывает водонепроницаемый прибор для подслушивания под водой шумов самолетов. Анализ шумов самолетов произведен Вецманом, *ibid.*, 2, 1921, стр. 166 и Прандлем (L. Prandtl), *ibid.*, 2, 1921, стр. 244. Имеется статья Тэкера (W. S. Tucker) о приеме звуков применительно к противовоздушной обороне в Journ. Roy. Aeronaut. Soc., 28, 1924, стр. 504.

15. Геофоны.

Геофон был изобретен во Франции во время войны для подслушивания через землю минных работ противника. После войны прибором заинтересовались горные инженеры. Общее описание геофонов дано Аланом Лейтоном, U. S. Bureau of Mines, Technical Papers, № 277, 1922. Краткая заметка об их испытаниях помещена Аклеем и Ральфом в Jour. Fr. Inst. 198, 1924, стр. 711, или 834; более подробный отчет опубликован U. S. Bureau of Mines Report of Investigation, № 2639. Имеется прекрасная статья Бэлла (H. S. Ball, Jour. of Inst. Min. and Met., 28, 1919, стр. 189) с материалами о геофонах и других приборах.

ДОПОЛНЕНИЕ.

Измерение поглощающей способности материалов.

Недавно появилась статья Экхардта и Крайслера (U. S. Bureau of standards Sci. Paper, № 526, 28, апрель 1926), о передаче и поглощении звука; она является продолжением работы Бюро (научная статья № 506), упомянутой нами в главе V. В появившейся статье содержится ряд данных о передаче и поглощении панелями из разных материалов; особенно интересен метод определения коэффициентов поглощения, основанный на принципах Тейлора (H. O. Taylor), о котором мы уже упоминали на стр. 79.

В методе Экхардта длина трубы фиксирована (соответственно резонансу при заданной частоте), и отражающая способность слоя выражается через максимумы и минимумы системы стоячих волн, определяемых пробной трубкой. Вводится также поправка на ослабление в трубе (эффект Гельмгольца), если это требуется. Представляет интерес несколько расширить сведения об опыте Венте, о котором кратко было упомянуто на стр. 79. Скорость возбуждающего поршня поддерживалась постоянной, причем давление у поршня (определявшееся пробной трубкой), измеряет сопротивление прибора в точке возбуждения. Если p_1 означает максимальное давление в точке возбуждения (соответствующее эффективной длине трубы, равной целому числу полуволн) и p_2 — минимальное давление в той же точке (причем теперь длина трубы отличается от предыдущей на одну четверть длины волны), то амплитудный коэффициент отражения слоя на конце трубы равен:

$$|r| = \frac{\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} - 1}{\sqrt{\frac{p_1}{p_2}} + 1},$$

откуда можно найти коэффициент поглощения слоя (см. задачу № 48).

В настоящее время готовится подробный отчет об упомянутой работе Венте.

Колич. печ. знаков в 1 бум. листе 117.920.

Бум. листов 5⁵/₈.

Авторских листов 15,2.

Ответств. редактор Барзданис В. К. Технич. редактор Мухин А. П.
Заказ поступил в производство 15/VIII 33 г. Подписан к печати 15/III 34 г. Колич. знак. в п. л. 58960.
Бумага 72×110. Ленгорлит 16251. Объем 10¹/₂ п. л. Тираж 5000+30.

ЛОЦТ Наркомвоенмора им. Клима Ворошилова (Ленинград, ул. Герцена, 1).

Цена 2 р. 75 к.
Переплет 75 мм.

СКИДЫ НА ИЗДАНИЯ ИЗДАТЕЛЬСТВА КОДЭ
ЛЕНИНГРАД & Москва, 2-й этаж, 5-й этаж
МОСКВА & Ульяновск, 3-й этаж, 11-й этаж